Concours Général des Lycées, Session 2008

Correction

Exercice 1:

1). S est un parabole de sommet $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$.

2.a). Soit $(u; v)$ un couple de nombres réels.

On a alors $f_U(x) = UM(x) = \sqrt{(x-u)^2 + (f(x)-v)^2}$ d'où $g_U(x) = (x-u)^2 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2$.

Par suite $g_U'(x) = 2(x-u) + 2 \times \frac{2}{3} x\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) = \frac{4}{9} x^3 - \frac{4v}{3} x - 2u$.

Par suite $g_U''(x) = \frac{4}{3} x^2 - \frac{4}{3} v = \frac{4}{3}(x^2 - v)$.

On résout $g_U''(x) = 0$. On distingue 3 cas:

- si $v < 0$, alors l'équation $g_U''(x) = 0$ n'a pas de solution.
- si $v = 0$, alors l'équation $g_U''(x) = 0$ admet 0 pour unique solution.
- si $v > 0$, alors l'équation $g_U''(x) = 0$ admet 2 solutions $\sqrt{v}$ et $-\sqrt{v}$.

b). Remarquons que $f_U = \sqrt{g_U}$ et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que g_U est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par définition, alors la fonction f a les mêmes variations que la fonction g_U.
Remarquons de plus que dans tous les cas:

- g_U' est continue sur $\mathbb{R}$.
- g_U' est un polynôme de degré 3, dont le coefficient des x^3 est positif donc $\lim_{x \to -\infty} g_U'(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g_U'(x) = +\infty$.

On distingue 3 cas:

Si $v < 0$:
On a montré que $g_U''(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Il est clair que $g_U''(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, comme trinôme du second degré ayant un coefficient des x^2 positif.
Alors g_U' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de bijection permet donc d'affirmer que l'équation $g_U'(x) = 0$ admet une unique solution α_U dans $\mathbb{R}$.
Comme la fonction g_U' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \alpha_U[$ et $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha_U; +\infty[$.
Par suite g_U est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U]$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.
Partant f_U est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U]$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

Si $v = 0$:
On a montré que $g_U''(x) = 0$ admet 0 pour unique solution dans $\mathbb{R}$.
Il est clair que $g_U''(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $g_U''(0) = 0$ comme trinôme du second degré ayant un coefficient des x^2 positif.
La fonction g_U' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Comme précédemment, on en déduit donc qu'il existe un unique réel α_U tel que $g_U'(\alpha_U) = 0$.
Donc g_U est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U]$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.
Partant f_U est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U]$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

Si $v > 0$:

On a montré que $g_U''(x) = 0$ admet deux solutions $\sqrt{v}$ et $-\sqrt{v}$ dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que $g_U''(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -\sqrt{v}[\bigcup]\sqrt{v}; +\infty[$, $g_U''(x) > 0$ pour $x \in]-\sqrt{v}; \sqrt{v}[$ comme trinôme du second degré ayant un coefficient des x^2 positif et deux racines distinctes.

Par suite la fonction g_U' est strictement croissante sur $]-\infty; -\sqrt{v}[$ et sur $]\sqrt{v}; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\sqrt{v}; \sqrt{v}[$.

La fonction g_U' est continue sur $\mathbb{R}$.

On sait que $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) > g_U'\left(\sqrt{v}\right)$.

Il y a donc 5 cas:

• soit $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) < 0$ donc $g_U'\left(\sqrt{v}\right) < 0$ alors l'équation $g_U'(x) = 0$ admet une unique solution α_U dans $]\sqrt{v}; +\infty[$ et $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \alpha_U[$ et $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha_U; +\infty[$.

La fonction g_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

La fonction f_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

• soit $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) = 0$ alors $g_U'\left(\sqrt{v}\right) < 0$ et donc l'équation $g_U'(x) = 0$ admet 2 solutions, $-\sqrt{v}$ et une autre solution $\alpha_U \in]\sqrt{v}; +\infty[$.

Donc $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; -\sqrt{v}[\bigcup]-\sqrt{v}; \alpha_U[$ et $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha_U; +\infty[$.

La fonction g_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

• soit $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) > 0$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right) > 0$, alors l'équation $g_U'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha_U \in]-\infty; -\sqrt{v}[$ et $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \alpha_U[$ et $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha_U; +\infty[$.

La fonction g_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

La fonction f_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

• soit $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) > 0$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right) = 0$, alors l'équation $g_U'(x) = 0$ admet admet 2 solutions, $\sqrt{v}$ et une autre solution $\alpha_U \in]-\infty; -\sqrt{v}[$.

Donc $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \alpha_U[$ et $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha_U; \sqrt{v}[\bigcup]\sqrt{v}; +\infty[$.

La fonction g_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

La fonction f_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; +\infty[$.

• soit $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) > 0$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right) < 0$, alors l'équation $g_U'(x) = 0$ admet admet 3 solutions, une solution $\alpha_U \in]-\infty; -\sqrt{v}[$, $\beta_U \in]-\sqrt{v}; \sqrt{v}[$ et $\gamma_U \in]\sqrt{v}; +\infty[$.

Donc $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; \alpha_U[\bigcup]\beta_U; \gamma_U[$ et $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]\alpha_U; \beta_U[\bigcup]\gamma_U; +\infty[$.

La fonction g_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et sur $[\beta_U; \gamma_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; \beta_U[$ et sur $[\gamma_U; +\infty[$.

La fonction f_U est alors strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha_U[$ et sur $[\beta_U; \gamma_U[$ et strictement croissante sur $[\alpha_U; \beta_U[$ et sur $[\gamma_U; +\infty[$.

Il reste à vérifier que ces cinq cas existent.

On a $g_U'\left(-\sqrt{v}\right) = \frac{4}{9}\left(-\sqrt{v}\right)^3 - \frac{4v}{3}\left(-\sqrt{v}\right) - 2u = -\frac{4}{9}v\sqrt{v} + \frac{4}{3}v\sqrt{v} - u = \frac{8}{9}v\sqrt{v} - 2u$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right) = \frac{4}{9}\left(\sqrt{v}\right)^3 - \frac{4v}{3}\left(\sqrt{v}\right) - 2u = \frac{4}{9}v\sqrt{v} - \frac{4}{3}v\sqrt{v} - u = -\frac{8}{9}v\sqrt{v} - 2u$.

Il est clair alors que l'on peut trouver un couple pour chaque cas.

Par exemple, dans l'ordre précédent, $(u; v) = (1; 1)$, $(u; v) = \left(\frac{4}{9}; 1\right)$, $(u; v) = (-1; 1)$, $(u; v) = \left(-\frac{4}{9}; 1\right)$ et $(u; v) = \left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

3). Le coefficient directeur de la tangente en $M(a)$ à S est $\frac{2a}{3}$ (en effet S represente la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{3} - \frac{3}{2}$ de dérivée $f'(x) = \frac{2x}{3}$) donc un vecteur directeur de cette tangente est $\left(1; \frac{2a}{3}\right)$.

Un vecteur directeur du rayon $(U\,M(a))$ a pour coordonnées $\left(a-u; \frac{a^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)$.

Donc un vecteur directeur de la tangente à C en $M(a)$ a pour coordonnées $\left(v-\frac{a^2}{3}+\frac{3}{2}; a-u\right)$.

Les deux tangentes coïncident alors (elles passent par $M(a)$, donc ont un point commun) si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Par suite les deux tangentes coïncident si et seulement si $1\times(a-u)-\frac{2\,a}{3}\left(v-\frac{x^2}{3}+\frac{3}{2}\right)=0$ d'où si $(a-u)+\frac{2\,a}{3}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)=0$.

Rappelons alors que $g_U'(x)=2\,(x-u)+2\times\frac{2\,x}{3}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)$.

Par suite $(a-u)+\frac{2\,a}{3}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)=\frac{g_U'(a)}{2}$.

Finalement les deux tangentes coïncident si et seulement si $g_U'(a)=0$ et donc le cercle de centre U et de rayon $U\,M(a)$ est tangent en $M(a)$ si et seulement si $g_U'(a)=0$

4.a). D'après l'étude faite à la question **2.b).**, on sait que l'équation $g_U'(x)=0$ admet toujours au moins une solution et au plus 3 solutions.
Partant tout point n'appartenant pas à S est centre d'au moins un et d'au plus 3 cercles tangents à S.

4.b). D'après l'étude réalisée à la question **2.b).**, on sait que l'équation $g_U'(x)=0$ admet:

- une unique solution si $v\le 0$
- si $v>0$, on a montré que le nombre de solutions de l'équation $g_U'(x)=0$ dépend des signes de $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right)$.

Si les images $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right)$ sont de même signe non nulles, l'équation n'a qu'une seule solution, si l'une des deux images est nulle, alors l'équation admet 2 solutions et si elles sont de signes différents non nulles alors l'équation admet 3 solutions.

D'après la règle des signes, les images $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)$ et $g_U'\left(\sqrt{v}\right)$ sont de même signe non nulles si $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)g_U'\left(\sqrt{v}\right)>0$, l'une des deux est nulle si $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)g_U'\left(\sqrt{v}\right)=0$ et sont de signes différents si $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)g_U'\left(\sqrt{v}\right)<0$.

Calculons $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)g_U'\left(\sqrt{v}\right)$.

On a $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)g_U'\left(\sqrt{v}\right)=\left(\frac{8}{9}\,v\sqrt{v}-2\,u\right)\left(-\frac{8}{9}\,v\sqrt{v}-2\,u\right)=\frac{4\,(81\,u^2-16\,v^3)}{81}$ et donc le signe de $g_U'\left(-\sqrt{v}\right)g_U'\left(\sqrt{v}\right)$ est celui de $81\,u^2-16\,v^3$.

Or $81\,u^2-16\,v^3>0$ si $81\,u^2>16\,v^3$ d'où $\frac{81}{16}\,u^2>v^3$ et donc comme la fonction $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $v<\sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$.

On en déduit donc:

- si $0<v<\sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$, alors l'équation $g_U'(x)=0$ admet une unique solution,
- si $v=\sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$, alors l'équation $g_U'(x)$ admet deux solutions,
- si $v>\sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$, alors l'équation $g_U'(x)=0$ admet 3 solutions.

Finalement:

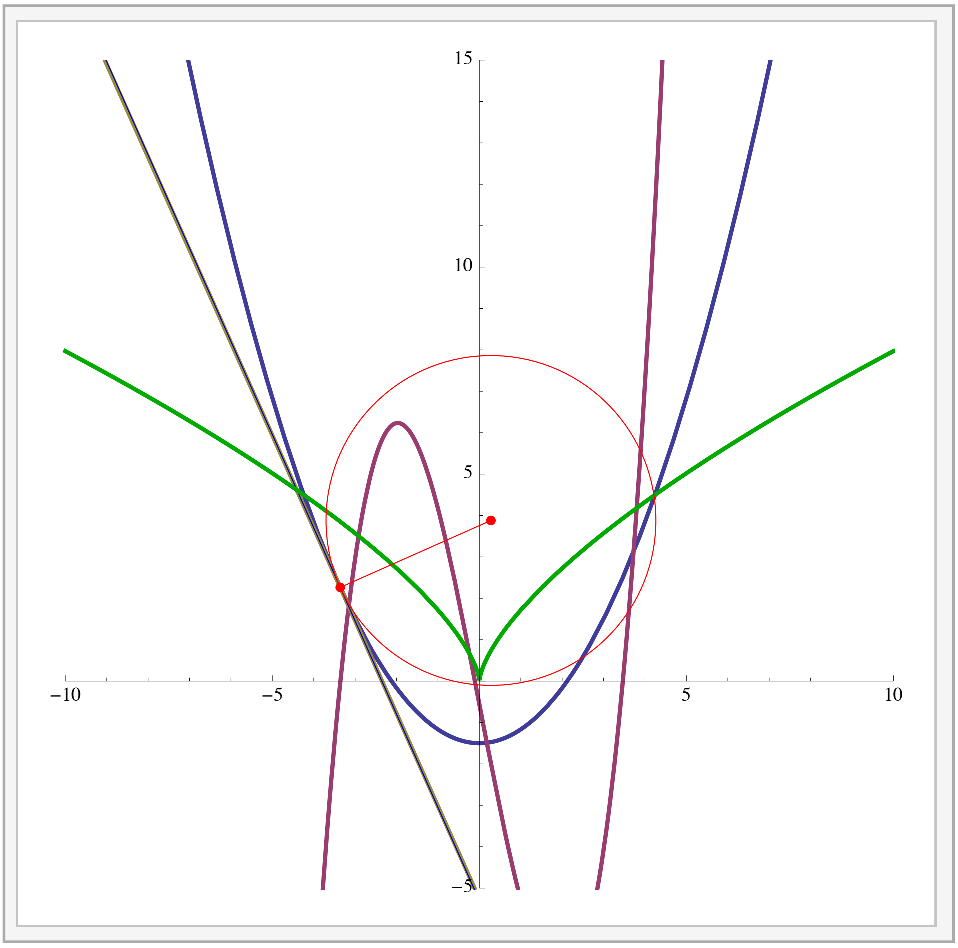
- $n(U)=1$ si $v<\sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$,

- $n(U) = 2$ si $v = \sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$
- $n(U) = 3$ si $v > \sqrt[3]{\frac{81}{16}\,u^2}$.

Ainsi en traçant la courbe représentative de la fonciton $h : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{81}{16}\,x^2}$, c'est à dire la courbe d'équation $81\,x^2 - 16\,y^2 = 0$, le cercle de centre U et de rayon $U\,M(x)$ est tangent en $M(x)$ à S pour:

- 1 unique valeur de x si U est en dessous de la courbe d'équation $81\,x^2 - 16\,y^2 = 0$;
- en 2 valeurs de x si U est sur la courbe d'équation $81\,x^2 - 16\,y^2 = 0$;
- en 3 valeurs de x si U est au-dessus de la courbe d'équation $81\,x^2 - 16\,y^2 = 0$.

On obtient le graphique:



On a représenté ci-dessus, la parabole P en bleu, la fonction $g_U\,'$ en violet, le cercle de centre U en rouge, la tangente commune au cercle et à P en bleu-noir.
En vert, la frontière, au-dessus de laquelle, un cercle de centre U admet 3 tangentes communes avec P (on peut observer ci-dessus que l'abscisse du point de tangence coïncide avec un zéro de $g_U\,'$), sur laquelle un cercle de centre U admet 2 points de tangence avec P et en-dessous de laquelle, un cercle de centre U admet un unique point de tangence avec P.

5.a). Soit a dans $\mathbb{R}$.

Une équation de la tangente $D(a)$ en $M(a)$ à S est $y = \frac{2\,a}{3}\,(x - a) + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2}\right)$ d'où $y = \frac{2\,a}{3}\,x - \frac{a^2}{3} - \frac{3}{2}$.

b). On note à nouveau U le point de P de coordonnées $(u; v)$.

On a $U \in D(a)$ si et seulement si $v = \frac{2\,a}{3}\,u - \frac{a^2}{3} - \frac{3}{2}$ d'où $a^2 - 2\,u\,a + 3\left(v + \frac{3}{2}\right) = 0$.

On reconnaît un trinôme du second degré ($P(a)$) dont le discriminant est $\Delta = (-2\,u)^2 - 4\times 1\times 3\left(v+\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{u^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)$.

Ainsi si $v < \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions, si $v = \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, l'équation a une solution et si $v > \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$ l'équation n'admet pas de solutions.

Géométriquement, on obtient donc que si U est en dessous de S, il y a deux tangentes distinctes à S passant par U, si U est un point de S, la tangente à S en U passe par U (trivial) et si U est au dessus de S, il n'y a pas de tangente à S passant par U.

c). On suppose que l'équation $U \in D(a)$ admet deux solutions distinctes a_1 et a_2 telles que que $U\,M(a_1) = U\,M(a_2)$.

Les nombres a_1 et a_2 sont donc solutions de l'équation $a^2 - 2\,u\,a + 3\left(v+\frac{3}{2}\right) = 0$.

Par suite $a_1 + a_2 = -\left(\frac{-2\,u}{1}\right) = 2\,u$ et $a_1\,a_2 = \frac{3\left(v+\frac{3}{2}\right)}{1} = 3\left(v+\frac{3}{2}\right)$.

On suppose que $U\,M(a_1) = U\,M(a_2)$ donc $g_U(a_1) = g_U(a_2)$ d'où $(a_1-u)^2 + \left(\frac{a_1{}^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2 = (a_2-u)^2 + \left(\frac{a_2{}^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2$.

Alors $$(a_1-u)^2 - (a_2-u)^2 + \left(\frac{a_1{}^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2 - \left(\frac{a_2{}^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2 = 0$$ d'où

$$(a_1-a_2)\,(a_1+a_2-2\,u) + \left(\frac{a_1{}^2}{3} - \frac{a_2{}^2}{3}\right)\left(\frac{a_1{}^2}{3} + \frac{a_2{}^2}{3} - 2\left(v+\frac{3}{2}\right)\right) = 0.$$

Or $a_1 + a_2 - 2\,u = 0$ donc il reste:

$$\frac{1}{3}\,(a_1+a_2)\,(a_1-a_2)\left(\frac{1}{3}\,(a_1+a_2)^2 - \frac{2}{3}\,a_1\,a_2 - 2\left(v+\frac{3}{2}\right)\right) = 0$$

$$\frac{2\,u}{3}\,(a_1-a_2)\left(\frac{4\,u^2}{3} - \frac{2}{3}\left(3\left(v+\frac{3}{2}\right)\right) - 2\left(v+\frac{3}{2}\right)\right) = 0$$

$$\frac{2\,u}{3}\,(a_1-a_2)\left(\frac{4\,u^2}{3} - 4\,v - 6\right) = 0$$

$$\frac{8\,u}{3}\,(a_1-a_2)\left(\frac{u^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) = 0.$$

Or d'après la question précédente, l'équation a deux solutions si $v > \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$ donc $\left(\frac{u^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) \neq 0$.

De plus $a_1 \neq a_2$ donc il reste $u = 0$.

d). Soit $U \in P$. On suppose maintenant qu'il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N de S.
Remarque: la différence par rapport à la question 3 est qu'ici le rayon du cercle n'est pas imposé.

Soit M et N deux points distincts de S, d'abscisses respectives a et a' avec $a \neq a'$.

Alors une équation de la tangente en M est $y = \frac{2\,a}{3}\,(x-a) + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2}\right)$ et une équation de la tangente en N est

$y = \frac{2\,a'}{3}\,(x-a') + \left(\frac{a'^2}{3} - \frac{3}{2}\right)$.

Puisque $a \neq a'$, alors les deux droites n'ont pas le même coefficient directeur, elles ne sont donc pas parallèles.
Elles admettent donc un point d'intersection.

Soit V le point d'intersection des deux tangentes.
Remarquons que $U\,M = U\,N$ puisque U est le centre d'un cercle passant par M et N.
Le point U est donc un point de la médiatrice D du segment $[M\,N]$.
Puisque la tangente en M est perpendiculaire à $(U\,M)$, puisque la tangente en N est perpendiculaire à $(U\,N)$ et puisque $(U\,M)$ et $(U\,N)$ sont symétriques par rapport à la médiatrice D , alors les deux tangentes sont symétriques par rapport à D.
Leur point d'intersection est donc un point de D, médiatrice de $[M\,N]$.

Par suite $VM = VN$.

e). Soit U un point du plan n'appartenant pas à S pour lequel il existe un cercle de centre U tangent à S en deux points distincts M et N.
On a montré à la question précédente que les tangentes en M et en N à S s'intersectent en point V du plan tels que $VM = VN$.
Or d'après la question **5.c).**, on sait que si un point du plan est tel qu'il existe deux tangentes à S passant par ce point tel que de plus ce point soit équidistant des points de tangence alors son abscisse est nulle.
Par suite l'abscisse de V est nulle: V est un point de l'axe des ordonnées.

Notons $M = M(a)$ (i.e. a l'abscisse du point M).
Comme S est symétrique par rapport à (Oy), alors la droite symétrique à la droite (VM) par rapport à (Oy) est tangente à la courbe S au point $M(-a)$, symétrique de M par rapport à (Oy).
Par suite $N = M(-a)$.
En effet, on a montré que par un point du plan, il passe au plus deux tangentes à S par ce point.
Enfin comme U appartient à la médiatrice de $[MN]$, et que la médiatrice de $[MN]$ est donc (Oy), alors $U \in (Oy)$ et ainsi $u = 0$.

Déterminons l'ordonnée de U (l'idée ici est de voir si U peut être n'importe où sur (Oy) ou non).
On sait que $a \neq 0$ puisque $M \neq N$ donc $M(a) \neq M(-a)$.
De plus on a $\overrightarrow{UM(a)}$ et un vecteur directeur de la tangente $D(a)$ à S en $M(a)$ orthogonaux.
Comme $\overrightarrow{UM(a)}$ a pour coordonnnées $\left(a-0\,;\,\frac{a^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)$ et un vecteur directeur à $D(a)$ a pour coordonnées $\left(1;\frac{2a}{3}\right)$, il vient
$a\times 1+\frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)=0$ d'où $\frac{2a^3}{9}-\frac{2a}{3}v=0$ et donc $v=\frac{a^2}{3}$.
On en déduit donc $v > 0$: le point U est un point de l'axe (Oy) d'ordonnée strictement positive.

Vérifions que réciproquement tout point de l'axe (Oy) d'ordonnée strictement positive est centre d'un cercle tangent à S en deux points distincts.
On pose $U(0; v)$ avec $v > 0$.
On pose alors $a = \sqrt{3v}$.
On a alors $a\times 1+\frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)=\frac{2a^3}{9}-\frac{2a}{3}v=\frac{2\sqrt{3}\,v\sqrt{v}}{3}-\frac{2\sqrt{3}\,\sqrt{v}\,v}{3}=0$ et
$-a\times 1+\left(-\frac{2a}{3}\right)\left(\frac{(-a)^2}{3}-\frac{3}{2}-v\right)=-\frac{2a^3}{9}+\frac{2a}{3}v=-\frac{2\sqrt{3}\,v\sqrt{v}}{3}+\frac{2\sqrt{3}\,\sqrt{v}\,v}{3}=0.$
Donc le vecteur $\overrightarrow{UM(a)}$ est orthogonal à un vecteur directeur de la tangente à S en $M(a)$ et orthogonal à un vecteur directeur de la tangente à S en $M(-a)$.
De plus comme S est symétrique par rapport à (Oy), que $U \in (Oy)$ et que $M(a)$ et $M(-a)$ sont symétriques par raaport à (Oy), on a clairement $UM(a) = UM(-a)$.
Donc le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ passe par $M(a)$ et $M(-a)$ et est tangent à S en ces deux points.

En conclusion, l'ensemble des points U du plan, n'appartenant pas à S tel qu'il existe un cercle tangent à S en deux points distincts est l'ensemble des points de l'axe des ordonnées dont l'ordonnée est strictement positive.

Exercice 2:

Le plan est rapporté à repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1). On considère un triangle ABC dont aucun côté n'est parallèle à l'axe des ordonnées Oy.

À toute droite D non parallèle à (Oy), on associe les points A', B' et C' intersections de D avec les parallèles à (Oy) menées par A, B et C respectivement.

Montrer qu'il existe une unique droite D pour laquelle la somme s des longueurs $AA' + BB' + CC'$ est minimale et la caractériser.

Notons $A(x_A;\, y_A)$, $B(x_B;\, y_B)$ et $C(x_C;\, y_C)$: on sait $x_A \neq x_B \neq x_C$.
Soit D une droite non parallèle à $(O\, y)$: D admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
On a alors $A'\,(x_A;\; mx_A + p)$, $B'\,(x_B;\; mx_B + p)$ et $C'\,(x_C;\; mx_C + p)$.
On a alors $s(m;\, p) = |mx_A + p - y_A| + |mx_B + p - y_B| + |mx_C + p - y_C|$.

Montrons que quel que soit la pente de la droite D, c'est à dire quel que soit son coefficient directeur m, la distance s est minimale quand la droite D passe par un des sommets du triangle.
Soit donc $m \in \mathbb{R}$.
Quitte à réordonner les points A, B et C, on peut supposer $y_A - mx_A \leq y_B - mx_B \leq y_C - mx_C$.
On pose $a = y_A - mx_A$, $b = y_B - mx_B$ et $c = y_C - mx_C$.
Alors on obtient $s(m;\, p) = |p - a| + |p - b| + |p - c|$ est une fonction de p, continue et affine par morceaux.

On a $s(m;\, p) = \begin{cases} a - p + b - p + c - p = -3\,p + a + b + c & \text{si } x \leq a \\ p - a + b - p + c - p = -p - a + b + c & \text{si } a < x \leq b \\ p - a + p - b - c + p = p - a - b + c & \text{si } b < x \leq c \\ p - a + p - b + p - c = 3\,p - a - b - c & \text{si } c < x \end{cases}$.

Les coefficients de p sont dans cet ordre -3, -1 , 1 et 3 donc la fonction est décroissante sur $]-\infty;\, b]$ et croissante sur $[b;\, +\infty[$.
Elle atteint donc son minimum en $x = b$ égal à $-a + c$.
Par suite, à un coefficient m donné, le minimum de la distance est réalisé pour $p = b = y_B - mx_B$, où B est choisi de telle sorte que $y_A - mx_A \leq y_B - mx_B \leq y_C - mx_C$.
Le point B appartient à la droite D d'équation $y = mx + (y_B - mx_B)$.
On en déduit qu'une droite D , si elle existe réalisant le minimum de la distance s doit passer par un des sommets du triangle.

Ainsi la distance $s(m;\, p)$ est réduite à $s(m) = |mx_A - y_A + y_B - mx_B| + |mx_C - y_C + y_B - mx_B|$ d'où $s(m) = |m(x_A - x_B) - (y_A - y_B)| + |m(x_C - x_B) - (y_C - y_B)|$.
La fonction $s(m)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et affine par morceaux.
On pose $m_{AB} = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ et $m_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.
On a:

- si $m_{AB} \leq m_{BC}$, $s(m) = \begin{cases} -m\,(x_A - x_B) + (y_A - y_B) - m(x_C - x_B) + (y_C - y_B) & \text{si } x \leq m_{AB} \\ m(x_A - x_B) - (y_A - y_B) - m(x_C - x_B) + (y_C - y_B) & \text{si } m_{AB} < x \leq m_{BC} \\ m(x_A - x_B) - (y_A - y_B) + m(x_C - x_B) - (y_C - y_B) & \text{si } m_{BC} < x \end{cases}$ d'où

$s(m) = \begin{cases} (2\,x_B + (x_A + x_C))\,m + (y_A + y_C - 2\,y_B) & \text{si } x \leq m_{AB} \\ (x_A - x_C)\,m - (y_A - y_C) & \text{si } m_{AB} < x \leq m_{BC} \\ (x_A + x_C - 2\,x_B)\,m - (y_A + y_C - 2\,y_B) & \text{si } m_{BC} < x \end{cases}$

- si $m_{AC} \leq m_{AB}$, $s(m) = \begin{cases} -m\,(x_A - x_B) + (y_A - y_B) - m(x_C - x_B) + (y_C - y_B) & \text{si } x \leq m_{BC} \\ -m(x_A - x_B) + (y_A - y_B) + m(x_C - x_B) - (y_C - y_B) & \text{si } m_{BC} < x \leq m_{AB} \\ m(x_A - x_B) - (y_A - y_B) + m(x_C - x_B) - (y_C - y_B) & \text{si } m_{AB} < x \end{cases}$ d'où

$s(m) = \begin{cases} (2\,x_B - (x_A + x_C))\,m + (y_A + y_C - 2\,y_B) & \text{si } x \leq m_{BC} \\ -(x_A - x_C)\,m + (y_A - y_C) & \text{si } m_{BC} < x \leq m_{AB}\,. \\ (x_A + x_C - 2\,x_B)\,m - (y_A + y_C - 2\,y_B) & \text{si } m_{AB} < x \end{cases}$

Il est clair que quel que soit les cas, la fonction s change de variations puisque $2\,x_B - (x_A + x_C) = -(x_A + x_C - 2\,x_B)$ et qu'elle n'est pas constante puisque $x_A \neq x_C$ donc $x_A - x_C \neq 0$.
La fonction s admet donc un minimum atteint pour $m = m_{AB}$ ou $m = m_{BC}$.

Par suite on peut en déduire d'une part qu'il existe une unique droite D pour laquelle la somme s des longueurs $AA' + BB' + CC'$ est minimale et d'autre part qu'une telle droite D prolonge un des côtés du triangle.
En effet, on a montré que quel que soit le coefficient directeur de la droite D, cette droite doit passer par un des sommets du triangle.
Parmi toutes les droites passant par un sommet du triangle, il existe une droite réalisant le minimum pour s et cette droite a pour

coefficient directeur, le coefficent directeur d'une des deux droites prolongeant les côtés du triangle passant par ce sommet: c'est donc une des droites définies par deux sommets du triangle.
Par suite l'une au moins des 3 droites prolongeant les côtés du triangle réalise le minimum pour s.
Par suite la droite D existe et prolonge l'un des côtés du triangle.
Le minimum s est alors:

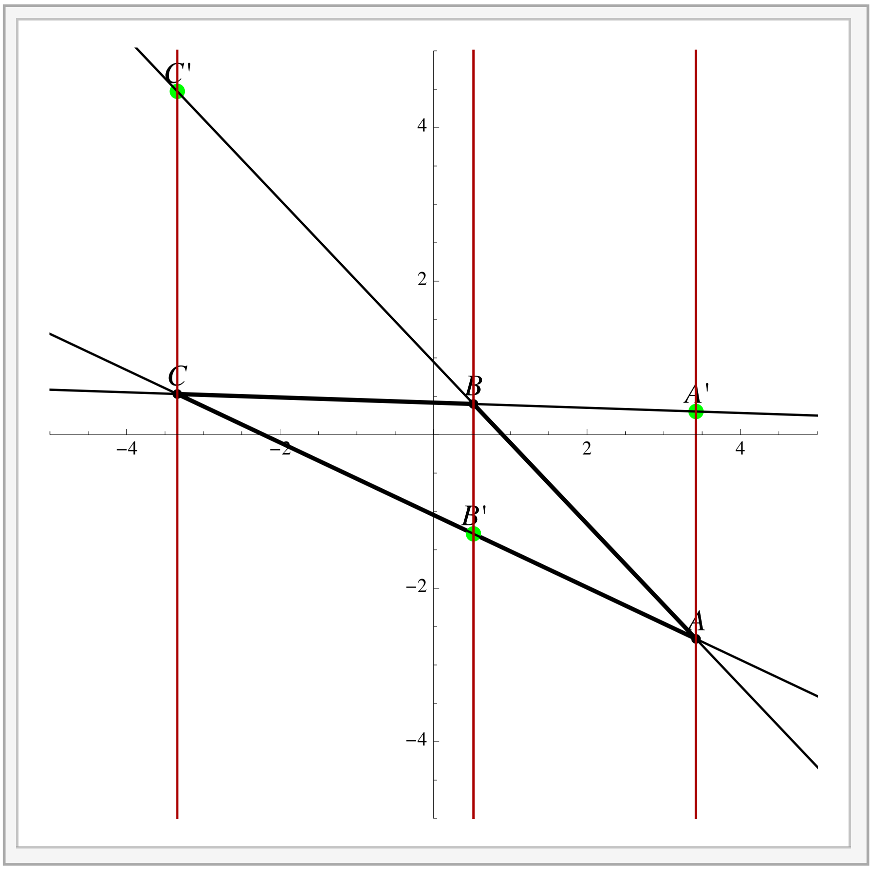
ou $\left|\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) + (y_C - y_A)\right| = \left|\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_C - x_A) + (y_C - y_A)\right|$ et on obtient $|x_C - x_A|\,|m_{AB} - m_{AC}| = |x_C - x_B|\,|m_{AB} - m_{BC}|$ (1) ;

ou $|x_A - x_B|\,|m_{BC} - m_{AB}| = |x_A - x_C|\,|m_{BC} - m_{AC}|$ (2);

ou $|x_B - x_A|\,|m_{AC} - m_{AB}| = |x_B - x_C|\,|m_{AC} - m_{BC}|$ (3).

Supposons l'un des deux rapports égaux.
Par exemple (1) = (2).
Il vient alors $|m_{AB} - m_{AC}| = |m_{AB} - m_{BC}| = |m_{BC} - m_{AB}|$ puisque $|x_A - x_C| = |x_C - x_A| \neq 0$.
Comme ABC est un triangle non aplati, alors les droites (AB), (AC) et (BC) ne sont pas parallèles et donc leurs coefficients directeurs ne sont pas égaux.
On a donc $m_{AB} \neq m_{AC}$, $m_{AC} \neq m_{BC}$ et $m_{AB} \neq m_{BC}$ d'où $|m_{AB} - m_{AC}| \neq 0$ et $|m_{AB} - m_{BC}| \neq 0$ et $|m_{BC} - m_{AB}| \neq 0$.
On obtient alors, $|x_C - x_A| = |x_C - x_B|$, $|x_A - x_B| = |x_A - x_C|$ et $|x_B - x_A| = |x_B - x_C|$.
Alors $x_C - x_A = x_C - x_B$ d'où $x_A = x_B$: impossible, ou $x_C - x_A = -x_C + x_B$ d'où $2\,x_C = x_A + x_B$.
Puis de même, $2\,x_A = x_B + x_C$.
On obtient alors $2\,x_A = x_B + \frac{x_A + x_B}{2}$ d'où $x_A = x_B$: impossible.
Dans tous les cas, on ne peut avoir égalité. Aucun des trois rapports n'est égal à un autre, il y en donc un plus petit que les deux autres.
Il y a donc unicité de la droite D. Un seul des côtés du triangle réalise le minimum pour s.

On peut vérifier que la droite réalisant le minimum est celle passant par les sommets du triangle ayant les abscisses extrêmes.
On le vérifie aisément avec un graphique:



2). Considérons une droite D parallèle à $(O\ y)$ d'équation $x = \alpha$.
Quitte à réordonner les points, on peut considérer $x_A < x_B < x_C$.

Alors $s_1(\alpha) = |\alpha - x_A| + |\alpha - x_B| + |\alpha - x_C| = \begin{cases} -3\,\alpha + (x_A + x_B + x_C) & \text{si } \alpha \le x_A \\ -\alpha + (-x_A + x_B + x_C) & \text{si } x_A < \alpha \le x_B \\ \alpha + (-x_A - x_B + x_C) & \text{si } x_B < \alpha \le x_C \\ 3\,\alpha + (-x_A - x_B - x_C) & \text{si } x_C < \alpha \end{cases}$.

La fonction s_1 est continue et donc elle admet un minimum absolu en $\alpha = x_B$ égal à $|x_B - x_A| + |x_B - x_C| = x_C - x_A$ (avec la convention $x_A < x_B < x_C$):
La droite D passe donc par un des sommets du triangle.

Considérons une droite D non parallèle à $(O\ y)$. Elle admet donc une équation cartésienne de la forme $m\,x + p - y = 0$.

La distance d'un point M de coordonnées $(x;\ y)$ à D est alors donnée par $d(M;\ D) = \dfrac{|m\,x + p - y|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

Ainsi $s_1(m;\ p) = \dfrac{|m\,x_A + p - y_A| + |m\,x_B + p - y_B| + |m\,x_C + p - y_C|}{\sqrt{1 + m^2}}$.

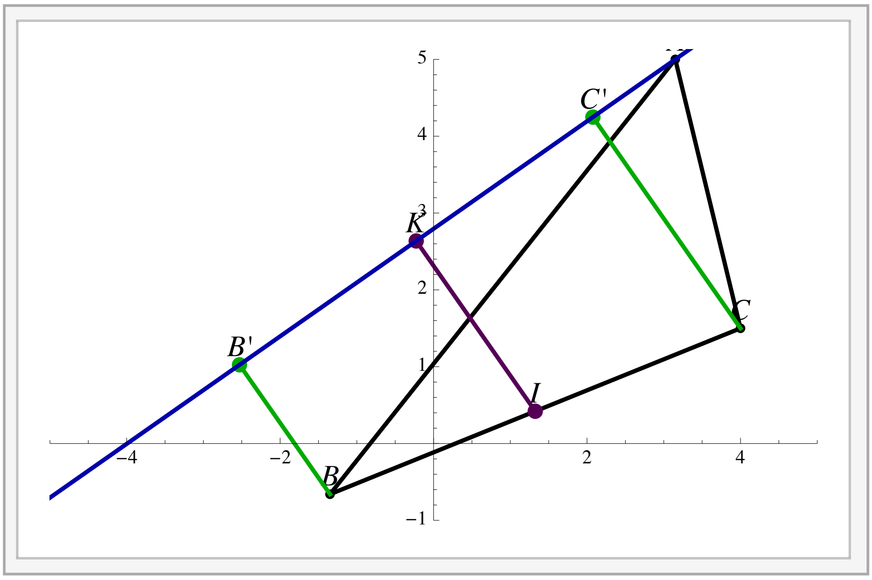
Un raisonnement analogue à la question précédente montre qu'à m fixé, la fonction de p , $s_1(m;\ p)$ admet un minimum pour p tel que la droite D passe par un des sommets du triangle.

Dans tous les cas, on peut donc considérer une droite D passant par un des sommets du triangle.
Montrons qu'alors il existe une droite réalisant un minimum pour s.

On distingue 2 cas:

- le cas où la droite est extérieure au triangle;
- le cas où la droite est intérieure au triangle.

1er cas: la droite D est extérieure au triangle. On suppose qu'elle passe par A.
On a donc la figure suivante:

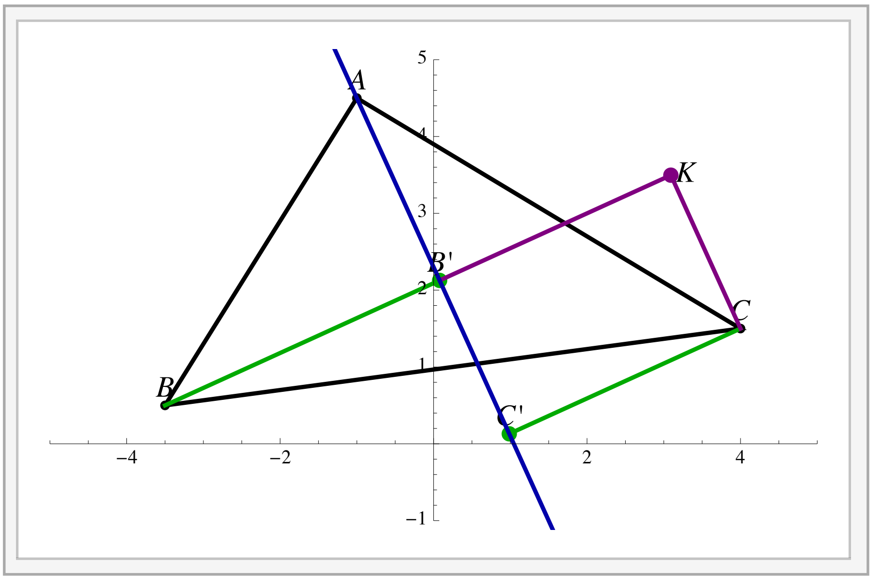


Soit I le milieu de $[B\,C]$.
Le projeté orthogonal de I sur D est le milieu de $[B'\,C']$, où B' et C' sont les projetés orthogonaux de B et C sur D.
En raisonnant avec le théorème des milieux dans les triangles $B'C'C$ et CBB', on obtient $B\,B' + C\,C' = 2\,K\,I$.
La distance $K\,I$ est alors minimale si la droite D est un des deux côtés du triangle.
On peut observer sur le dessin , D étant extérieure au triangle, que la distance $K\,I$ est la somme de deux longueurs:

- de I au côté du triangle en suivant la direction $(K\,I)$;
- du côté au point K en suivant la direction $(K\,I)$.

Lorsque D est un des côtés, la première longueur est minimale (le projeté orthogonal réalise le minimum de la distance d'un point extérieur à tous les points d'une droite) et la deuxième est nulle.

2d cas: La droite D est intérieure au triangle. On suppose qu'elle passe par A.
On obtient la figure:



On a alors $s_1 = BB' + CC' = BK$, où K est le projeté orthgonal de C sur (BB').
Il est clair que $B'K = C'C$.
BK est la longueur du projeté orthogonal du segment $[BC]$ sur la direction orthogonale à la droite D.
Ainsi $BK = BC\cos(K\hat{B}C)$.
Or la droite D étant intérieure au triangle, elle prend les positions entre les droites (AB) et (AC).
Le cosinus étant décroissant sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, plus la droite D s'éloigne des côtés plus l'angle $K\hat{B}C$ est petit et plus la longueur BK est grande.
La longueur BK est donc minimale lorsque D est un des côtés du triangle.

Finalement dans les 2 cas ci-dessus, s_1 est minimale lorsque D est un des côtés du triangle.
s_1 est alors réduite à la longueur d'une des hauteurs du triangle. Elle est donc minimale quand la droite D est le côté le plus grand du triangle (on peut penser à l'aire du triangle).
Par suite, sauf si le triangle est isocèle, la droite D est unique.

Pour conclure, il reste à comparer cette distance avec l'écart

---

Exercice 3:

1). On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre x, pour tout réel x.
Notons c le prix au kilo des côtellettes et r le prix au kilo du rôti.
On déduit des informations de l'énoncé:

- $\lfloor 0,75 \times c \rfloor + \lfloor 0,25 \times r \rfloor = 18$
- $\lfloor 0,25 \times c \rfloor + \lfloor 0,5 \times r \rfloor = 17$.

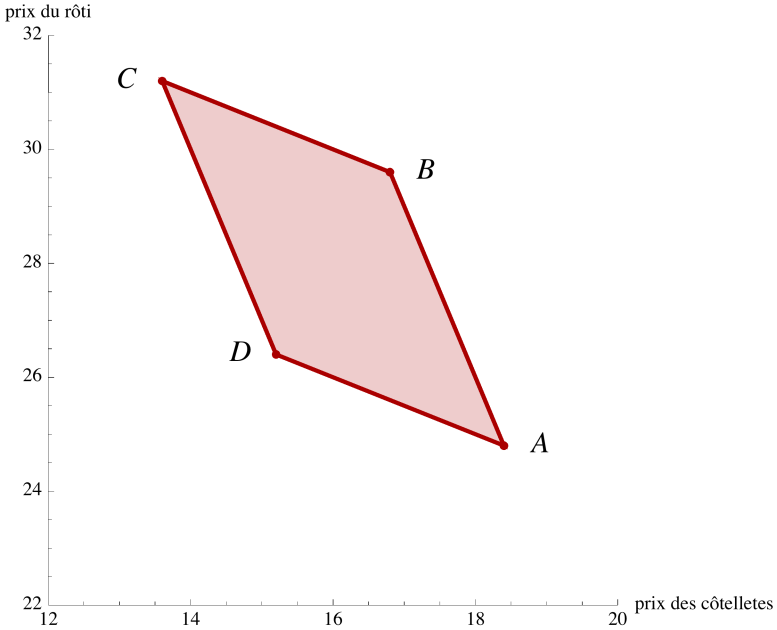
On cherche donc les nombres c et r solutions du système ci-dessus.
Alors comme $\lfloor 0,75 \times c \rfloor \le 0,75\,c < \lfloor 0,75\,c \rfloor + 1$, on en déduit $0,75\,c - 1 < \lfloor 0,75 \times c \rfloor \le 0,75\,c$ et de même $0,25\,r - 1 < \lfloor 0,25 \times r \rfloor \le 0,25\,r$.
La première égalité donne donc l'inégalité $0,75\,c + 0,25\,r - 2 < \lfloor 0,75\,c \rfloor + \lfloor 0,25\,r \rfloor \le 0,75\,c + 0,25\,r$.
Par suite, on obtient finalement, $18 \le 0,75\,c + 0,25\,r < 20$.
De même, $17 \le 0,25\,c + 0,5\,r < 19$.

Les nombres c et r doivent donc vérifier le système $\begin{cases} 18 \leq 0,75\,c + 0,25\,r < 20 \\ 17 \leq 0,25\,c + 0,5\,r < 19 \end{cases}$.

Le point de coordonnées $(c,\ r)$ doit donc être:

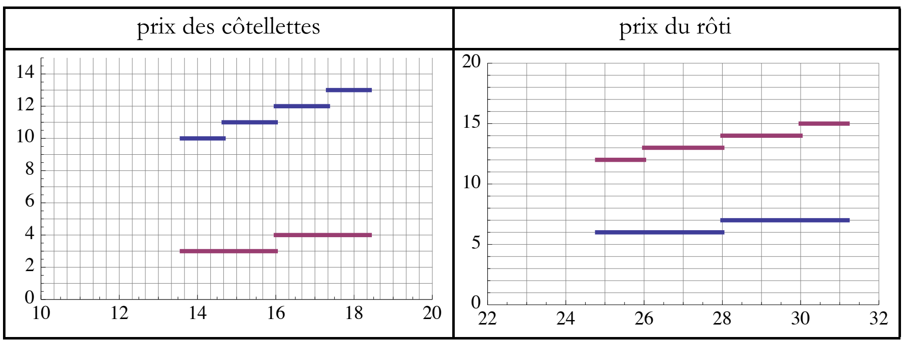
- en dessous de la droite d'équation $0,75\,x + 0,25\,y = 20$;
- au dessus de la droite d'équation $0,75\,x + 0,25\,y = 18$;
- en dessous de la droite d'équation $0,75\,x + 0,25\,y = 19$;
- au dessus de la droite d'équation $0,25\,x + 0,5\,y = 17$.

Les points d'intersection de ces 4 droites sont:
$A(18,4\,;\ 24,8)$, $B(16,8\,;\ 29,6)$, $C(13,6\,;\ 31,2)$ et $D(15,2\,;\ 26,4)$.
On en déduit que le couple $(c; r)$ est le coupe de coordonnées d'un point situé dans le parallèlogramme représenté ci-dessous.



Ainsi on sait que $13,6 \leq c \leq 18,4$ et $24,8 \leq r \leq 31,2$.

Néanmoins toutes les valeurs ne conviennent pas: par exemple $\lfloor 0,75 \times 15,2 \rfloor + \lfloor 0,25 \times 26,4 \rfloor = 11 + 6 = 17 \neq 18$.
Il faut donc affiner.
Observons les fonctions $x \mapsto \lfloor 0,75\,x \rfloor$ et $x \mapsto \lfloor 0,25\,x \rfloor$ sur $[13,6\,;\ 18,4]$ et les fonctions $y \mapsto \lfloor 0,25\,y \rfloor$ et $y \mapsto \lfloor 0,5\,y \rfloor$ sur $[24,8\,;\ 31,2]$.



Ainsi:

$$\bullet\ x \mapsto \lfloor 0,75\, x \rfloor = \begin{cases} 10 & \text{si } 13,6 \leq x < \dfrac{44}{3} \\ 11 & \text{si } \dfrac{44}{3} \leq x < 16 \\ 12 & \text{si } 16 \leq x < \dfrac{52}{3} \\ 13 & \text{si } \dfrac{52}{3} \leq x < 18,4 \end{cases} \quad \text{et } x \mapsto \lfloor 0,25\, x \rfloor = \begin{cases} 3 & \text{si } 13,6 \leq x < 16 \\ 4 & \text{si } 16 \leq x < 18,4 \end{cases}$$

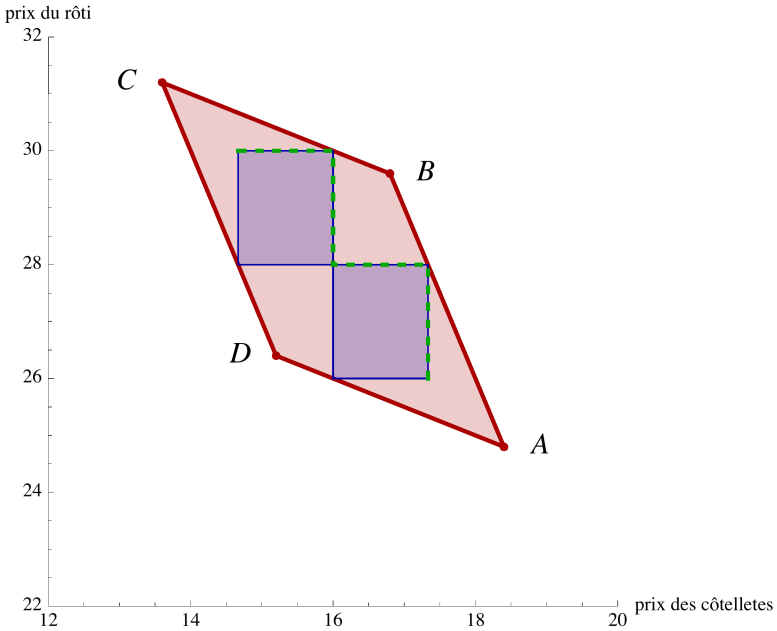
$$\bullet\ y \mapsto \lfloor 0,25\, y \rfloor = \begin{cases} 6 & \text{si } 24,8 \leq y < 28 \\ 7 & \text{si } 28 \leq y < 31,2 \end{cases} \text{ et } y \mapsto \lfloor 0,5\, y \rfloor = \begin{cases} 12 & \text{si } 24,6 \leq y < 26 \\ 13 & \text{si } 26 \leq y < 28 \\ 14 & \text{si } 28 \leq y < 30 \\ 15 & \text{si } 30 \leq y < 31,2 \end{cases}.$$

Par suite, les possibilités pour le couple $(c; r)$ sont:

- pour le 1er ticket: $(c; r) \in \left[\dfrac{44}{3}; 16\right[\times [28; 31,2[$ car $11 + 7 = 18$ ou $(c; r) \in \left[16; \dfrac{52}{3}\right[\times [24,8 \times 28[$ car $12 + 6 = 18$;
- pour le 2d ticket: $(c; r) \in [13,6\,;\ 16[\times [28; 30[$ car $3 + 14 = 17$ ou $(c; r) \in [16\,;\ 18,4[\times [26; 28[$ car $4 + 13 = 17$.

Par recoupement, $(c; r) \in \left[\dfrac{44}{3}; 16\right[\times [28; 30[$ ou $(c; r) \in \left[16; \dfrac{52}{3}\right[\times [26; 28[$.

L'ensemble des prix possibles est alors représenté par les deux rectangles en bleu ci-dessous, sauf les frontières supérieures, en vert.



2). Notons n le nombre de produits vendus, et $p_1, \ldots, p_n$ les prix au kilo de chaque produit.
Notons N le nombre de tickets de la journée.
Alors pour tout $k \in \{1; \ldots; N\}$, le k-ième ticket donne une équation de la forme (E_k) : $\lfloor \mu_{1\,;\,k}\, x_1 \rfloor + \ldots + \lfloor \mu_{p\,;\,k}\, x_n \rfloor = s_k$, où $\mu_{i\,;\,k}$ est la quantité de produit au prix $p_i$vendue à la k-ième vente pour $i \in \{1; \ldots; n\}$ et s_k la somme totale portée sur le k-ième ticket. Le n-uplet $(p_1; \ldots; p_n)$ est une solution de l'équation (E_k) pour $k \in \{1; \ldots; N\}$.

Or pour tout $k \in \{1; \ldots; N\}$ et tout $i \in \{1; \ldots; n\}$, il existe un réel $\epsilon_{i\,;\,k} > 0$ tel que la fonction $x \mapsto \lfloor \mu_{i\,;\,k}\, x \rfloor$ est constante sur $[p_i; p_i + \epsilon_{i\,;\,k}[$.

En effet, la fonction $x \mapsto \lfloor \mu_{i\,;\,k}\, x \rfloor$ est constante sur $\mathbb{R}$ si $\mu_{i\,;\,k} = 0$ et sinon sur tout intervalle de la forme $\left[\dfrac{1}{\mu_{i\,;\,k}}\, q\,;\ \dfrac{1}{\mu_{i\,;\,k}}\,(q+1)\right[$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

Si $\mu_{i\,;\,k} = 0$, tout $\epsilon_{i\,;\,k}$ convient, sinon il existe donc un entier q tel que $p_i \in \left[\frac{1}{\mu_{i\,;\,k}}\,q\,;\,\frac{1}{\mu_{i\,;\,k}}\,(q+1)\right[$ et un réel $\epsilon_{i\,;\,k} > 0$ tel que $\left[p_i\,;\,p_i + \epsilon_{i\,;\,k}\right[\subset \left[\frac{1}{\mu_{i\,;\,k}}\,q\,;\,\frac{1}{\mu_{i\,;\,k}}\,(q+1)\right[$.

Alors pour tout $k \in \{1;\,\ldots\,;\,N\}$, tout n-uplet $(x_1;\,\ldots;\,x_n)$ tel que $x_i \in [p_i\,;\,p_i + \epsilon_{i\,;\,k}[$ pour $i \in \{1;\,\ldots;\,n\}$ est solution de (E_k).
En effet le n-uplet $(p_1;\,\ldots;\,p_n)$ est solution et $\lfloor \mu_{i\,;\,k}\,x_i \rfloor = \lfloor \mu_{i\,;\,k}\,p_i \rfloor$ pour $i \in \{1;\,\ldots;\,n\}$ donc $\lfloor \mu_{1\,;\,k}\,x_1 \rfloor + \ldots + \lfloor \mu_{p\,;\,k}\,x_n \rfloor = \lfloor \mu_{1\,;\,k}\,p_1 \rfloor + \ldots + \lfloor \mu_{p\,;\,k}\,p_n \rfloor = s_k$.

On pose alors $\delta_i = \min(\epsilon_{i\,;\,k}\,;\,k \in \{1;\,\ldots;\,N\})$ pour $i \in \{1;\,\ldots;\,n\}$.
Remarquons que $\delta_i > 0$ pour $i \in \{1;\,\ldots;\,n\}$ puisque $\epsilon_{i\,;\,k} > 0$ pour $k \in \{1;\,\ldots;\,N\}$ et donc $[p_i;\,p_i + \delta_i[$ est un intervalle non réduit à un élément pour $i \in \{1;\,\ldots;\,n\}$ et donc contient une infinité d'éléments.
Pour tout $k \in \{1;\,\ldots;\,N\}$, $x \mapsto \lfloor \mu_{i\,;\,k}\,x \rfloor$ est constante sur $[p_i;\,p_i + \delta_i[\subset [p_i\,;\,p_i + \epsilon_{i\,;\,k}[$ et $\lfloor \mu_{i\,;\,k}\,x_i \rfloor = \lfloor \mu_{i\,;\,k}\,p_i \rfloor$ pour tout $x_i \in [p_i;\,p_i + \delta_i[$.
Ainsi tout n-uplet $(x_1;\,\ldots;\,x_n)$ tel que $x_i \in [p_i;\,p_i + \delta_i[$ pour $i \in \{1;\,\ldots;\,n\}$, est solution de (E_k) pour $k \in \{1;\,\ldots;\,N\}$.
Les intervalles $([p_i;\,p_i + \delta_i[)_{i\in\{1;\ldots;n\}}$ étant non réduits à un élément, il existe une infinité de n-uplets $(x_1;\,\ldots;\,x_n)$ vérifiant toutes les équations (E_k).
La donnée de tous les tickets de la journée ne peut en aucun cas permettre de déterminer le prix exact de chacun des produits vendus.