Concours Général des Lycées, session 2009

Correction

Exercice 1: Analyse.

Le but de l'exercice est la recherche des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$, vérifiant pour tout réel x la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que $\dfrac{1 - f(x)}{x^2}$ admette une limite lorsque x tend vers 0, que l'on notera a.

On rapelle que tout réel x de $[-1; 1]$, s'écrit de façon unique $x = \cos(\theta)$ avec θ dans $[0; \pi]$.

1.a). On a pour $\theta \neq 0$, $\dfrac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)^2} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$.

Or on sait que $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\alpha \to 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = 1$ donc $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 1$ et ainsi comme $\dfrac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}\right)^2$ on obtient finalement $\displaystyle\operatorname*{Lim}_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$.

b). On pose $\phi(\theta) = \sin(\theta) - \dfrac{2\theta}{\pi}$ pour $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ϕ est dérivable et $\phi'(\theta) = \cos(\theta) - \dfrac{2}{\pi}$.

On sait que la fonction cosinus est continue strictement décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[0; 1]$ et donc comme $\dfrac{2}{\pi} \in [0; 1]$, on sait qu'il existe un unique réel $\theta_0 \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{2}{\pi}$.

Par suite comme cosinus est strictement décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos(\theta) > \cos(\theta_0)$ pour $0 \leq \theta < \theta_0$ et $\cos(\theta) < \cos(\theta_0)$ pour$\theta_0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Par suite alors $\cos(\theta) > \dfrac{2}{\pi}$ pour $0 \leq \theta < \theta_0$ et $\cos(\theta) < \dfrac{2}{\pi}$ pour $\theta_0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $\phi'(\theta) > 0$ pour $\theta \in [0; \theta_0[$ et $\phi'(\theta) < 0$ pour $\theta \in]\,\theta_0; \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

Alors la fonction ϕ est croissante sur $[0; \theta_0]$ et décroissante sur $\left[\theta_0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Remarquons alors que $\phi(0) = 0$ et $\phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{2 \times \frac{\pi}{2}}{\pi} = 0$ et donc on en déduit que $\phi(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi on a bien $\sin(\theta) \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$ pour tout $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On pose alors $\psi(\theta) = \cos(\theta) - \left(1 - \dfrac{\theta^2}{\pi}\right)$ pour tout $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

ψ est dérivable et on a $\psi'(\theta) = -\sin(\theta) + \dfrac{2\theta}{\pi} = -\phi(\theta)$.

On a vu que $\phi(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\psi'(\theta) \leq 0$ pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et ainsi ψ est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Alors comme $\psi(0) = 0$, on en déduit que $\psi(\theta) \leq 0$ pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et par suite on a donc $\cos(\theta) \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}$ pour tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2). Soit f ne fonction solution du problème. On se donne un réel x et l'on pose pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, avec θ_n dans $[0; \pi]$.

a). On sait que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = a \in \mathbb{R}$.

Alors comme pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = f(x) - 1 = -x^2 \times \frac{1 - f(x)}{x^2}$, on en déduit que

$\lim_{x \to 0} f(x) - 1 = \lim_{x \to 0}\left(-x^2\right) \times \lim_{x \to 0} \frac{1 - f(x)}{x^2} = 0$.

La fonction f est continue en 0.

On sait que pour tout réel $x \in [-1; 1]$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ donc par continuité $\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) = 1$.

Par suite comme pour tout entier n, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$, alors $\lim_{n \to +\infty} \cos(\theta_n) = 1$.

On sait que pour tout entier n, $0 \leq \theta_n \leq \pi$, et on peut assurer que pour tout n assez grand, $0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$.

En effet s'il existe toujours un entier n assez grand tel que $\frac{\pi}{2} < \theta_n \leq \pi$, alors $-1 \leq \cos(\theta_n) \leq 0$ et donc pour tout réel ϵ tel que $0 < \epsilon < 1$, il existe un entier n tel que $|\cos(\theta_n) - 1| > \epsilon$: en contradiction avec $\lim_{n \to +\infty} \cos(\theta_n) = 1$.

Ainsi pour n assez grand, on obtient $\theta_n{}^2 \leq \frac{(1 - \cos(\theta_n))}{\pi}$ et donc $0 \leq \theta_n \leq \sqrt{\frac{(1 - \cos(\theta_n))}{\pi}}$.

Finalement comme $\lim_{n \to +\infty} \cos(\theta_n) = 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{(1 - \cos(\theta_n))}{\pi}} = 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \theta_n = 0$.

b). On sait que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n)$ et que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2\left(f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2 - 1 = 2\cos^2(\theta_{n+1}) - 1 = \cos(2\theta_{n+1})$.

Ainsi pour tout entier n, $\cos(\theta_n) = \cos(2\theta_{n+1})$.

Alors on en déduit $2\theta_{n+1} = \theta_n\,(2\pi)$ ou $2\theta_{n+1} = -\theta_n\,(2\pi)$ d'où $2\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}\,(\pi)$ ou $\theta_{n+1} = \frac{-\theta_n}{2}\,(\pi)$.

Par suite en choisissant un entier N tel que pour tout entier $p \geq N$, $0 \leq \theta_p \leq \frac{\pi}{2}$, et donc $\frac{\pi}{2} \leq \frac{-\theta_n}{2} \leq \pi$ d'où $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

c). Établir que a est positif et que $f(x) = \cos\left(x\sqrt{2a}\right)$.

Pour tout entier naturel $n \geq N$, on a $\frac{1 - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2} = \frac{1 - \cos(\theta_n)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}$ et $\cos(\theta_n) \leq 1 - \frac{\theta_n{}^2}{\pi}$ d'où $1 - \cos(\theta_n) \geq \frac{\theta_n{}^2}{\pi}$ et donc

$\frac{1 - f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2} \geq \frac{\frac{\theta_n{}^2}{\pi}}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2} \geq 0$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2} = a$, on déduit de l'inégalité précédente que $a \geq 0$.

On a pour tout entier $n \geq N$, $\theta_n = \frac{\theta_N}{2^{n-N}}$ et donc $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos(\theta_n) = \cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$.

Or $\lim_{x\to 0} \frac{1-f(x)}{x^2} = a$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2} = a$.

De plus $\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos(\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)}{\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)^2} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Remarquons que $\frac{\frac{1-f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}}{\frac{1-\cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)}{\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)^2}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^2} = \left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}\,\frac{x}{2^n}}\right)^2$ car $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$ et donc $1 - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}}\right)$.

Ainsi par quotient de limites, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}\,\frac{x}{2^n}}\right)^2 = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2\,a$.

Or $\left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}\,\frac{x}{2^n}}\right)^2 = \left(\frac{\theta_N}{\frac{x}{2^N}}\right)^2$ indépendant de n donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\theta_N}{2^{n-N}\,\frac{x}{2^n}}\right)^2 = \left(\frac{\theta_N}{\frac{x}{2^N}}\right)^2$.

Finalement $\left(\frac{\theta_N}{\frac{x}{2^N}}\right)^2 = 2\,a$ d'où $\theta_N{}^2 = \left(\frac{x}{2^N}\right)^2 \times 2\,a$ et ainsi $\theta_N = \frac{x}{2^N}\sqrt{2\,a}$ ou $\theta_N = -\frac{x}{2^N}\sqrt{2\,a}$ car $\theta_N \geq 0$ et $x \in [-1; 1]$.

On en déduit donc $f\left(\frac{x}{2^N}\right) = \cos(\theta_N) = \cos\left(\frac{x}{2^N}\sqrt{2\,a}\right)$ ou $f\left(\frac{x}{2^N}\right) = \cos(\theta_N) = \cos\left(-\frac{x}{2^N}\sqrt{2\,a}\right) = \cos\left(\frac{x}{2^N}\sqrt{2\,a}\right)$ car cosinus est paire.

Remarquons alors que pour tout entier naturel $k \leq N$, $f\left(\frac{x}{2^{N-(k-1)}}\right) = f\left(2\times\frac{x}{2^{N-k}}\right) = 2\,f\left(\frac{x}{2^{N-k}}\right)^2 - 1$.

Alors si on suppose que $f\left(\frac{x}{2^{N-k}}\right) = \cos\left(\frac{x}{2^{N-k}}\sqrt{2\,a}\right)$, on obtient $f\left(\frac{x}{2^{N-(k-1)}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2^{N-k}}\sqrt{2\,a}\right) - 1 = \cos\left(2\,\frac{x}{2^{N-k}}\sqrt{2\,a}\right) = \cos\left(\frac{x}{2^{N-(k-1)}}\sqrt{2\,a}\right)$.

Comme la propriété $f\left(\frac{x}{2^{N-k}}\right) = \cos\left(\frac{x}{2^{N-k}}\sqrt{2\,a}\right)$ est vraie pour $k = 0$ et comme elle est héréditaire, on peut en déduire qu'elle est vraie pour tout $k \leq N$.

Ainsi pour $k = N$, on obtient $f(x) = f\left(\frac{x}{2^{N-N}}\right) = \cos\left(\frac{x}{2^{N-N}}\sqrt{2\,a}\right) = \cos\left(x\sqrt{2\,a}\right)$. Cqfd.

Exercice 2: Probabilités, Jouons aux dés.

1). On ne marque rien si chaque face porte un numéro différent.

Il y alors $20\times 19\times 18\times 17$ combinaisons de numéros différents et il y a 20^4 combinaisons au total.

La probabilité de ne rien marquer est alors de $\frac{20\times 19\times 18\times 17}{20^4} = \frac{2907}{4000} \approx 0.72675$.

2). Soit a compris entre 1 et 20. Déterminons pour tout $k \leq 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.
Soit a compris entre 1 et 20.

Pour chaque dé, la probabilité de l'événement "la face obtenue est la face a" a pour probabilité $\frac{1}{20}$.

Ainsi "obtenir la face a avec un dé" est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès $\frac{1}{20}$.

Chauqe dé est indépendant des autres.
Le lancer des 4 dés est donc un shéma de Bernoulli d'ordre de 4.

La variable aléatoire donnant le nombre de a obtenus suit donc une loi binomiale d'ordre 4 et de paramètre de succès $\frac{1}{20}$.

Par suite pour $k \leq 4$, on a p(" on a exactement k nombres a parmi les dés lancés ") $= \binom{4}{k}\left(\frac{1}{20}\right)^k\left(\frac{19}{20}\right)^{4-k}$.

On obtient:

Nombres de a	0	1	2	3	4
probabilité	$\frac{19^4}{20^4}$	$4\times\frac{19^3}{20^4}$	$6\times\frac{19^2}{20^4}$	$4\times\frac{19}{20^4}$	$\frac{1}{20^4}$

3). On a $p(X_a = 0) = p(\text{"0 nombre } a\text{"}) + p(\text{"1 nombre } a\text{"}) = \frac{19^4}{20^4} + 4\times\frac{19^3}{20^4} = \frac{157\,757}{160\,000}$ et

$p(X_a = 1) = p(\text{"2 nombres } a\text{"}) + p(\text{"3 nombres } a\text{"}) + p(\text{"4 nombres } a\text{"}) = 6\times\frac{19^2}{20^4} + 4\times\frac{19}{20^4} + \frac{1}{20^4} = \frac{2243}{160\,000}$.

On a donc:

X_a	0	1
probabilité	$\frac{157757}{160000}$	$\frac{2243}{160000}$

On a alors $G = \sum_{a=1}^{20} a\, X_a$ et ainsi comme l'espérance est linéaire $E(G) = \sum_{a=1}^{20} a\, E(X_a)$.

Remarquons alors que pour tout entier a, $1 \leq a \leq 20$, $E(X_a) = 0\times\frac{157\,757}{160\,000} + 1\times\frac{2243}{160\,000} = \frac{2243}{160\,000}$ (indépendante de a).

Par suite $E(G) = \frac{2243}{160\,000}\sum_{a=1}^{20} a = \frac{2243}{160\,000}\times\frac{(1+20)\times 20}{2} = \frac{471\,030}{160\,000} \approx 2,94$.

En moyenne on peut donc espérer 2,94 points à ce jeu.

4). Pour marquer 8 points exactement, il y a 4 possibilités de tirages: 88 a b, 888 a, 8888 et a a b b de telle sorte que $a + b = 8$ et $a \neq b$.

On a vu $p(888\,a) = 4\times\frac{19}{20^4}$ et $p(8888) = \frac{1}{20^4}$.

Pour les tirages 88 a b, il y a $19\times 18\times 6$ possibilités (19 choix parmi les 20 nombres moins 8, puis 18 choix pour éviter la répétitions et $\times 6$ car chaque tirage peut être fait dans 6 ordres différents: 88 a b, 88 b a, …).

Ainsi $p(88\,a\,b) = \frac{19\times 18\times 6}{20^4} = \frac{2052}{20^4}$.

Enfin pour les tirages a a b b, il y a 3 couples possibles ($7 + 1$, $6 + 2$, $5 + 3$), chaque couple ayant la probabilité $\frac{6}{20^4}$.

En effet, a étant tiré, il ne reste aucune possibilité pour les autres. Par contre on a toujours 6 ordres différents.

Finalement la probabilité de marquer 8 points est donc $p_8 = \frac{1 + 4\times 19 + 2052 + 3\times 6}{20^4} = \frac{2147}{160\,000} \approx 0,0134$.

5). On sait que l'espérance de gain en relançant tout est $\approx 2,94$ points.

Si on garde les 2 deux, 2 possibilités: faire un double a a distinct du double 2 auquel cas le gain est $2 + a$ ou tout autre lancer de 2 dés, auquel cas le gain est 2.

Pour a fixé, la probabilité d'obtenir le double a a est $\frac{1}{20^2}$.

Le gain moyen est alors $\sum_{a\neq 2}\frac{2+a}{20^2}$.

Ensuite, la probabilité d'obtenir un autre lancer est $1-19\times\frac{1}{20^2}$.

On en déduit que le gain moyen en gardant les 2 deux est donc $\sum_{a\neq 2}\frac{2+a}{20^2}+\left(1-\frac{19}{20^2}\right)\times 2=\frac{2}{20^2}\sum_{a\neq 2}2+\frac{1}{20^2}\sum_{a\neq 2}x+2-\frac{19}{20^2}=\frac{19}{20^2}+\frac{208}{20^2}+2-\frac{19}{20^2}=\frac{1008}{400}\approx 2,52.$

On peut d'ors et déjà assurer que cette option n'est pas avantageuse.

Enfin si on garde le 11, ou les tirages ne contiennent aucun 11, ou ils contiennent au moins un 11.
On est amené à reprendre les questions **2).** et **3).** pour 3 lancers.

Pour $a\neq 11$, on a $p(\text{"aucun } a\text{"})=\frac{19^3}{20^3}$, $p(\text{" un } a\text{ "})=\frac{3\times 19^2}{20^3}$, $p(\text{" 2 } a\text{ "})=\frac{3\times 19}{20^3}$ et $p(\text{" 3 } a\text{ "})=\frac{1}{20^3}$.

On en déduit que $p(\text{"au moins 2 } a\text{"})=\frac{3\times 19}{20^3}+\frac{1}{20^3}=\frac{58}{8000}$.

Ainsi le gain moyen pour $a\neq 11$ est donné par $\sum_{a\neq 11}a\times\frac{58}{8000}=\frac{11\,542}{8000}$.

Pour $a=11$, pour 3 lancers on a toujours $p(\text{"aucun } a\text{"})=\frac{19^3}{20^3}$, $p(\text{" un } a\text{ "})=\frac{3\times 19^2}{20^3}$, $p(\text{" 2 } a\text{ "})=\frac{3\times 19}{20^3}$ et $p(\text{" 3 } a\text{ "})=\frac{1}{20^3}$.

Mais comme on dispose déja d'un 11, on obtient $p(\text{"au moins deux 11"})=\frac{3\times 19^2}{20^3}+\frac{3\times 19}{20^3}+\frac{1}{20^3}=\frac{1141}{8000}$. Dans ce cas on gagne 11.

Par suite le gain moyen, en gardant le 11 est donné par $\frac{11\,542}{8000}+11\times\frac{1141}{8000}=\frac{24\,093}{8000}\approx 3,01.$

En conclusion, l'option la plus avantageuse est garder le 11, mais de peu.

6). Examinons les cas.
◊ Si on garde tout, on ne gagne rien: l'espérance est nulle.

◊ Si on relance tout, on sait que l'espérance de gain est $\approx 2,94$.

◊ Si on garde a_i, $i=1$ à 4, d'après la question précédente, le gain moyen est donné par $\sum_{a\neq a_i}a\times\frac{58}{8000}+a_i\times\frac{1141}{8000}=\frac{(210-a_i)\times 58+a_i\times 1141}{8000}=\frac{12\,180+1083\,a_i}{8000}$.

On peut donc assurer qu'il faut donc garder $a_1$si on ne garde qu'un seul dé à condition que le gain moyen soit supérieur au gain moyen de tout relancer.

On résout donc $\frac{12\,180+1083\,a_i}{8000}\geq\frac{471\,030}{160\,000}$ et on obtient $a_1\geq 10,5$ et donc il faut $a_1\geq 11$.

◊ Si on garde a_1 et a_2, on a les possibilités:

• $a_1\,a_2\,a\,a$ avec $a\neq a_1$ et $a\neq a_2$ auquel cas on gagne a. La probabilité pour a donné de sortir $a\,a$ est $\frac{1}{20^2}$. Le gain moyen est alors $\sum_{a\neq a_1 \text{ et } a\neq a_2}a\times\frac{1}{20^2}=\frac{(210-a_1-a_2)}{400}$.

• $a_1\,a_2\,a_1\,a$ ou $a_1\,a_2\,a_2\,a$ avec $a\neq a_1$ et $a\neq a_2$ auquel cas on gagne $a_1$ou a_2. La probabilité d'un tel tirage est $\frac{19}{20^2}$et comme il y en a 2, la probabilité des 2 cas est $\frac{38}{20^2}$.

Le gain moyen est alors $\frac{38}{400} a_1 + \frac{38}{400} a_2 = \frac{38}{400} (a_1 + a_2)$.

• $a_1\, a_2\, a_1\, a_2$ auquel cas on gagne $a_1 + a_2$. La probabilité d'un tel tirage est $\frac{1}{20}$ et il y a 2 cas (a_1 puis a_2 ou a_2 puis a_1) donc le gain moyen est $\frac{2}{400} (a_1 + a_2)$.

Finalement, le gain moyen en gardant a_1 et a_2 est $\frac{210 + 39 (a_1 + a_2)}{400}$.

Remarque:

En procédant de même avec 2 des a_i, on observe automatiquement que si on garde 2 dés, il faut garder a_1 et a_2.

On résout alors $\frac{210 + 39 (a_1 + a_2)}{400} \geq \frac{471\,030}{160\,000}$ et $\frac{210 + 39 (a_1 + a_2)}{400} \geq \frac{12\,180 + 1083\, a_1}{8000}$.

Dans le premier cas, on trouve $a_1 + a_2 \geq 24,\ 8$ et dans le deuxième $780\, a_2 \geq 7980 + 303\, a_1$.

Alors comme $a_2 + 1 \leq a_1$, on obtient que $a_2 \geq 17,\ 36$.

Ainsi pour que garder les 2 dés soit plus avantageux il faut que $a_2 \geq 18$ auquel cas on a forcément $a_1 + a_2 \geq 25$.

◊ Enfin si on garde a_1, a_2 et a_3, on gagne si le dé lancé affiche a_1, a_2 ou a_3.

La probabilité d'un tel tirage est $\frac{1}{20}$ pour chaque a_i et donc le gain moyen est $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{20}$.

(De même qu'auparavant, en gardant 3 dés, le plus avantageux est de garder les 3 dés les plus "forts".)

On résout $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{20} \geq \frac{471\,030}{160\,000}$ et on obtient alors $a_1 + a_2 + a_3 \geq 58,\ 88$: impossible $(20 + 19 + 18 = 57)$.

En conclusion:

Si $a_2 \geq 18$, on garde $a_1$et a_2, sinon si $a_1 \geq 11$, on garde a_1 seul et dans tous les autres cas, on relance les 4 dés.

Exercice 3: Arithmétique.

1). On considère deux entiers strictement positifs a et b premiers entre eux.

(a). Comme $a \wedge b = 1$, alors $a \wedge (a + b) = 1$.

Ainsi $(a + b)$ ne divise $k\, a$ que si $(a + b) \mid k$.

Or $k \in [\![1; a + b - 1]\!]$ donc $(a + b)$ ne divise pas k: pour tout k, $r_k \neq 0$ et donc $r_k \in [\![1; a + b - 1]\!]$.

Il reste à montrer que les $r_k$sont tous distincts.

Soit $k,\ l \in [\![1; a + b - 1]\!]$.

On suppose $r_k = r_l$.

On a donc $k\, a = q(a + b) + r_k$ et $l\, a = q' (a + b) + r_l$.

Ainsi $(k - l)\, a = (q - q') (a + b)$.

Par suite $(a + b)$ divise $(k - l)$.

Alors comme $| k - l | < a + b$, on a donc $k = l$.

Les r_k sont tous distincts.

(b). On sait que $n \geq a + b - 1$, donc U_{r_k} est défini pour tout $k \in [\![1; a + b - 1]\!]$.

Or pour tout $k \in [\![1; a + b - 1]\!]$, $k\, a = q_k(a + b) + r_k$ et donc $(k + 1)\, a = q_k(a + b) + r_k + a$.

Ainsi:

• si $r_k < b$, alors $r_k + a < a + b$ et donc $r_{k+1} = r_k + a$.

Comme la suite U est de période a, alors $U_{r_{k+1}} = U_{r_k}$.

• si $r_k \geq b$, alors $r_k + a \geq a + b$. On pose $r_k = r_k' + b$ avec $r_k' < a$ puisque $r_k < a + b$.

On en déduit $(k + 1)\, a = (q_k + 1) (a + b) + r_k'$ et comme $(k + 1)\, a = q_{k+1}(a + b) + r_{k+1}$, on en déduit, d'après l'unicité du reste de la division euclidienne que $r_{k+1} = r_k'$.

Ainsi $r_{k+1} - r_k = -b$ et comme la suite U est de période b, alors $U_{r_{k+1}} = U_{r_k}$.

Finalement pour tout $k \in [\![1; a + b - 1]\!]$, $U_{r_{k+1}} = U_{r_k}$.

Par suite, comme $\{r_k;\ k \in [\![1; a + b - 1]\!]\} = [\![1; a + b - 1]\!]$, on obtient donc que $U_k = U_{k'}$ pour tous k et k' dans $[\![1; a + b - 1]\!]$.

La suite U est constante sur $[[1; a + b - 1]\!]$ égale par exemple à U_a.

Soit alors $j \in [\![a+b; n]\!]$.
Il existe un entier q et un entier $r \in [\![1; a]\!]$, tel que $j = q\,a + r$.
Comme U est de période a alors $U_j = U_r$ et comme $r \in [\![1; a]\!] \subset [\![1; a+b-1]\!]$, alors $U_r = U_a$ et donc $U_j = U_a$.

On a donc montré que U est constante sur $[\![1; n]\!]$.

2). Soit $i \leq n - d$, on veut donc montrer que $U_i = U_{i+d}$.
Comme $n \geq a + b - d$ et $d = a \wedge b$, alors $i = q\,d + r$ avec $0 \leq r < d$ d'où $i = (q-1)\,d + r'$ avec $1 \leq r' \leq d$ et q tel que $(q-1)\,d + r' \leq n - d$.
On a aussi $i + d = q\,d + r' \leq n$.
On pose alors $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$ et on a $a' \wedge b' = 1$.

Soit alors $r \in [\![1; d]\!]$.
La suite $\left(U_{r+(k-1)\,d}\right)_k$ est définie pour tout k tel que $r + (k-1)\,d \leq n - d$ et donc pour tout $k \leq n' = \left[\frac{n}{d}\right]$ avec $a' + b' - 1 \leq n'$.
De plus elle est de période a' et b'.
En effet $U_{r+(k+a'-1)\,d} = U_{r+(k-1)\,d+a'\,d} = U_{r+(k-1)\,d+a} = U_{r+(k-1)\,d+a} = U_{r+(k-1)\,d}$ puisque U est de période a.
De même pour b'.
D'après la question précédente la suite $\left(U_{r+(k-1)\,d}\right)_k$ est constante.

Remarquons alors que pour $k = q$, comme $U_i = U_{r'+(q-1)\,d} = U_{r+q\,d} = U_{i+d}$: la suite U est de période d.

3.(a). On sait que $a \geq 2$, $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.
On a $r_1 = a < a + b - 1$.
Soit m l'entier tel que $r_m = a + b - 1$. On a $m \geq 2$.
Comme $r_{a+b-1} = b < a + b - 1$, alors on peut affirmer que $m \leq a + b - 2$.

On pose alors $A = \{r_1 = a; \ldots; r_{m-1} = b - 1\}$ et $B = \{r_{m+1} = a - 1; \ldots; r_{a+b-1} = b\}$.
On a bien $A \bigcup B = [\![1; a+b-2]\!]$ et $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.
La suite V définie par 1 sur A et 0 sur B n'est pas constante.

Montrons que V est de période a et b.
• Soit i un entier tel que $i \leq a + b - 2 - a$ c'est à dire $i \leq b - 2$.
Alors il existe k tel que $i = r_k$ et $k \neq m - 1$ et $k \neq a + b - 1$.
Ainsi si $i \in A$, alors $i + a \in A$.
En effet on a vu à la question **1. (b).** que si $r_k < b$, alors $r_{k+1} = r_k + a$ donc $i + a = r_{k+1}$ avec $k + 1 \leq m - 1$.
De même si $i \in B$, alors $i + a = r_{k+1}$ avec $m + 1 < k + 1 \leq a + b - 1$: $i + a \in B$.
La suite est donc de période a.
• Soit i un entier tel que $i \leq a + b - 2 - b$ c'est à dire $i \leq a - 2$.
Il existe donc k tel que $i = r_k$ avec r_k reste de la division de $r_{k-1} + a$ par $a + b$.
On a $i + b \equiv r_{k-1} + a + b$ (modulo $a + b$) et donc $i + b \equiv r_{k-1}$ (modulo $a + b$).
Alors comme $1 \leq i \leq a - 2$, $1 \leq i + b \leq a + b - 2$ et comme $1 \leq r_{k-1} \leq a + b - 2$, on a donc $i + b = r_{k-1}$.
Soit $i \in A$.
Comme $i \neq a$, alors $i \neq r_1$donc $k - 1 \geq 1$ et comme $i \in A$, $k < m$.
On a ainsi $1 \leq k - 1 < m$: $i + b \in \{r_1; \ldots; r_{m-1}\}$ c'est à dire $i \in A$.
Soit $i \in B$.
Alors comme $i \neq a - 1$, $i = r_k \neq r_{m+1} = a - 1$ d'où $m + 1 < k \leq a + b - 1$ donc $m + 1 \leq k - 1 \leq a + b - 2$.
Ainsi $i + b \in \{r_{m+1}; \ldots; r_{a+b-1}\}$ c'est à dire $i + b \in B$.

Dans tous les cas, on a donc $V(i + a) = V(i)$ et $V(i + b) = V(i)$.
La suite V est donc de période a et de période b.

(b). Supposons qu'il existe deux partages $(A; B; V)$ et $(A'; B'; V')$ de $[\![1; a+b-2]\!]$ satisfaisants aux conditions.
Supposons par exemple que $r_1 = a \in A$.
Alors ou $r_1 \in A'$ ou $r_1 \in B'$.
On a montré précédemment que la périodicité de la suite entraîne $V'(r_1) = V'(r_2) = \ldots = V'(r_{m-1})$ donc ou $\{r_1; \ldots; r_{m-1}\} \subset A'$ ou $\{r_1; \ldots; r_{m-1}\} \subset B'$. Ainsi $A \subset A'$ ou $A \subset B'$.

Supposons alors que $A \subset A'$ et $A \neq A'$: il existe donc un entier $i \in B$ et $i \in A'$.
Par périodicité de V', on obtient que $V'(k) = V'(i)$ pour tout $k \in B$.
Ainsi $V'(k) = 1$ pour tout entier k de $A \bigcup B$.
Alors $A' = A \bigcup B = [\![1; a+b-2]\!]$ et $B' = \emptyset$:contradiction.
On en déduit que $A = A'$.
En raisonnant de même avec B', ou B, on arrive au même résultat. Ainsi le partage est unique.
On peut seulement échanger A et B.

Montrons que pour tout x de A, $a+b-1-x$ est dans A.
Soit $x \in A$.
On sait qu'il existe des entiers k et k' tels que $1 \leq k < m$ et $1 \leq k' \leq a+b-1$ et tels que $x = r_k$ et $a+b-1-x = r_{k'}$.
Remarquons alors que $r_k + r_{k'} = a+b-1 = r_m$.
On sait que $k\,a \equiv r_k$ (modulo $a+b$), $k'\,a \equiv r_{k'}$ (modulo $a+b$) et $m\,a \equiv a+b-1$ (modulo $a+b$).
On obtient donc $(k+k')\,a \equiv m\,a$ (modulo $a+b$).
Ainsi $a+b$ divise $a(k+k'-m)$.
D'après le théorème de Gauss, comme $a \wedge (a+b) = 1$, on en déduit que $a+b$ divise $(k+k'-m)$.
Or $-(a+b) < -m+2 \leq k+k'-m \leq a+b-1 < a+b$ donc $k+k'-m = 0$ d'où $k+k' = m$.
Finalement $1 \leq k' < m$.
Donc $a+b-1-x \in A$.

V est un palindrome.
La suite $V' : x \mapsto V(a+b-1-x)$ est telle que $V_i' = 1$ pour $i \in A$ et $V_i' = 0$ pour $i \in B$ et V' est de période a et de période b.
On a donc $V' = V$, par unicité du partage et donc de la suite.
Ainsi le terme de rang x et celui de rang $a+b-1-x$ (c'est à dire de rang x en partant de la fin) sont identiques.
On peut donc "retourner" la suite, et on obtient la même suite.