Concours Général des Lycées

Correction

Exercice 1: Une configuration géométrique.

1). Le point F est un point du cercle de diamètre $[A\,C]$ donc le triangle ACF est rectangle en F.

Par suite si $F \neq A$ ou $F \neq C$, $A\hat{F}C$ est un angle aigu. Les droites $(C\,F)$ et $(A\,C)$ ne sont donc pas perpendiculaires.
Dans le cas où $F = A$ ou $F = C$, alors $(F\,C) = (A\,C)$ et les droites $(C\,F)$ et $(A\,C)$ ne sont donc pas perpendiculaires.
Par suite comme la droite Δ est perpendiculaire à la droite $(A\,C)$, les droites $(C\,F)$ et Δ ne sont pas parallèles, sinon $(C\,F)$ serait perpendiculaires à $(A\,C)$ (règles d'incidence).
Le point G est donc bien défini.

2). On note h_1 l'homothétie $h_{C;\frac{R}{r}}$. Alors $h_1(\gamma) = \Gamma$.

En effet on a $h_1(C) = C$ et $h_1(B) = A$ puisque $B \in [A\,C]$ et $\dfrac{C\,A}{C\,B} = \dfrac{R}{r}$ d'où $h_1([C\,B]) = [C\,A]$.

Par suite l'image du cercle γ de diamètre $[B\,C]$ est le cercle de diamètre $[A\,C]$, c'est à dire Γ.

On note h_2 l'homothétie $h_{F;\frac{r'}{R}}$. Alors $h_2(\Gamma) = \gamma'$.

En effet, comme le cercle γ' est tangent intérieurement au cercle Γ en F, alors il existe une droite perpendiculaire aux rayons $[\Omega\,F]$ et $[O'\,F]$ en F: les points Ω, O' et F sont donc alignés.
De plus comme γ' est intérieur au cercle Γ alors $O' \in [\Omega\,F]$.

Enfin on a donc $\overrightarrow{F\,O'} = \dfrac{r'}{R}\,\overrightarrow{F\,\Omega}$ puisque F appartient aux deux cercles donc $F\,O' = r'$ et $F\,\Omega = R$.

Ainsi $h_2(\Omega) = O'$.
Alors comme l'image d'un cercle par une homothétie est un cercle de centre, l'image du centre et de rayon, le rayon multiplié par le rapport de l'homothétie, on sait donc que l'image du cercle Γ est le cercle de centre O' et de rayon $\dfrac{r'}{R} \times R = r'$, c'est donc γ'.

Remarquons que l'on a $h_2(A) = E$. Les points F, E et A sont alignés.
En effet, les droites $(E\,O')$ et $(A\,\Omega)$ sont parallèles (Δ est perpendiculaire à $(A\,\Omega)$ par définition et tangente à γ' en E).
Comme une homothétie transforme une droite en un droite parallèle, on peut affirmer que l'image de A par h_2 est un point de la droite $(E\,O')$.
De plus cette image est un point de γ' : c'est donc le point E.

3). Les propriétés précédentes montrent que s'il existe une homothétie transformant γ en γ' alors son rapport k vérifie $|k| = \dfrac{r'}{r}$ et de plus son centre H est tel que $\overrightarrow{H\,O'} = k\,\overrightarrow{H\,O}$ donc $H \in [O\,O']$.

On en déduit qu'il y a deux rapports possibles, $\dfrac{r'}{r}$ et $-\dfrac{r'}{r}$ et donc 2 homothéties possibles.

Soit h_3 l'homothétie $h_{D;-\frac{r'}{r}}$. Alors $h_3(\gamma) = \gamma'$.

En effet comme D est le point de tangence des deux cercles tangents extérieurement, on sait donc que $D \in [O\,O']$ et que $O'\,D = r'$ et $O\,D = r$ d'où $\overrightarrow{D\,O'} = -\dfrac{r'}{r}\,\overrightarrow{D\,O}$.

Donc $h_3(O) = O'$ et le cercle γ a donc pour image le cercle de centre O' et de rayon $\dfrac{r'}{r} \times r = r'$: c'est bien γ'.

Considérons l'homothétie $h_2 \circ h_1$. C'est une homothétie de rapport $\frac{r'}{R} \times \frac{R}{r} = \frac{r'}{r}$ qui transforme γ en γ' puisque $h_2 \circ h_1(\gamma) = h_2(\Gamma) = \gamma'$.

Or il existe une unique homothétie transformant γ en γ' de rapport $\frac{r'}{r}$. Donc l'homothétie de rapport $\frac{r'}{r}$ qui transforme γ en γ' est $h_2 \circ h_1$.
Il reste donc à déterminer le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$.
Remarquons alors que $h_2 \circ h_1(C) = h_2(C)$ et donc le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$ appartient à la droite $(C F)$ puisque F est le centre de h_2.
Remarquons aussi que $h_2 \circ h_1(B) = h_2(A) = E$.
Donc le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$ appartient à la droite $(B E)$.
Par conséquent le centre de l'homothétie $h_2 \circ h_1$ est le point G.

Les centres de homothéties qui transforment γ en γ' sont donc D et G.
On obtient en particulier que O, O', D et G sont alignés.

4). Dans le triangle AGC, $(G B)$ et $(A F)$ sont deux hauteurs du triangle.
Elles se coupent en E donc $(C E)$ est la troisième hauteur. On a donc $(C E)$ perpendiculaire à $(A G)$.
Remarquons alors que l'image de C par l'homothétie h_3 de centre D qui transforme γ en γ' est E .
En effet une homothétie transforme une droite en une droite parallèle. Ainsi comme la droite $(O' E)$ est perpendiculaire à la droite $(G B)$, l'antécédent de $(O' E)$ est une droite perpendiculaire à $(G B)$ passant par O. C'est donc $(B C)$.
Comme de plus E est un point du cercle γ', alors son antécédent par h_3 est un point du cercle γ.
C'est donc un point du cercle γ appartenant à la droite $(B C)$: c'est ainsi B ou C.
Comme ce ne peut pas être B, alors c'est C.
Les points C, D et E sont donc alignés.

Considérons alors le triangle BCE.
Le point I est le milieu de $[B E]$ et O celui de $[B C]$.
D'après le théorème des milieux, on obtient donc $(O I) // (C E)$.
Donc la droite $(B I)$ est perpendiculaire à la droite $(A G)$.

Considérons maintenant le triangle AGO.
Les droites $(O I)$ et $(B G)$ sont deux hauteurs de ce triangle concourantes en I.
Le point I est donc l'orthocentre de ce triangle et donc la droite $(A I)$ est perpendiculaire à la droite $(G C)$ c'est à dire à la droite $(G D)$.

Démontrons enfin que D appartient à $(A I)$.
Comme D appartient au cercle γ de diamètre $[B C]$, alors $(B D) \perp (C D)$.
De plus on a montré que $(O I) // (C D)$ donc $(B D) \perp (O I)$.
De plus O est équidistant des points B et D comme centre du cercle γ.
Donc $(O I)$ est la médiatrice de $[B D]$.
Par conséquent, c'est un axe de symétrie pour le quadrilatère $OBID$.
Les angles $O \hat{B} I$ et $O \hat{D} I$ sont symétriques et donc égaux: la droite $(I D)$ est donc perpendiculaire à la droite $(O D)$.
Finalement les droites $(A I)$ et $(D I)$ sont perpendiculaires à la même droite $(O D)$: elles sont donc confondues.
Les points A, I et D sont alignés et sur une perpendiculaire à la droite $(G D)$.

5). Les triangles ABI et GDI sont rectangles respectivement en B et en D.
De plus leurs angles en le somme I sont opposés par le sommet puisque les points A, I, D d'une part et B, I, G d'autre part sont alignés.
Ces deux triangles sont donc semblables.

Remarquons alors de plus que les triangles OBI et ODI sont isométriques puisqu'ils ont 2 côtés de même longueur (un côté commun $[O I]$ et deux rayons du cercle γ) et un angle droit chacun.
Par suite, on obtient $B I = I D$.
Donc les triangles semblables ABI et GDI ont un côté correspondant de même longueur: ils sont donc isométriques.

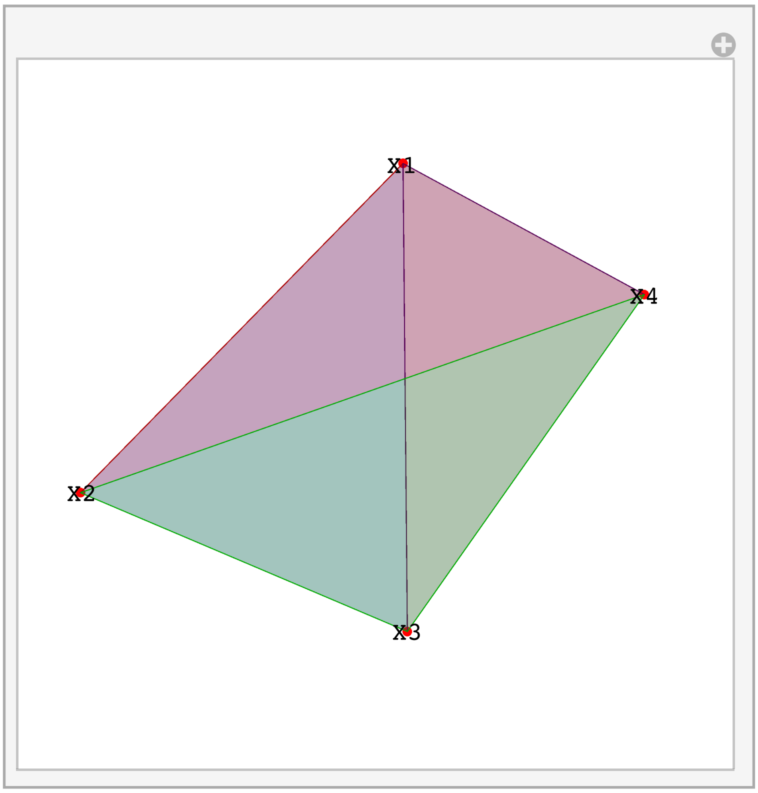
Par suite $GD = AB = 2R - 2r$.

6). Comme (EO') et (BO) sont parallèles, G, E, B et G, O', O sont alignés dans cet ordre, le théorème de Thalès donne $\frac{GO'}{GO} = \frac{EO'}{BO}$ d'où $\frac{GD - DO'}{GD + DO} = \frac{r'}{r}$ et donc $\frac{2R - 2r - r'}{2R - 2r + r} = \frac{r'}{r}$.

On obtient donc $r(2R - 2r - r') = r'(2R - r)$ d'où $2Rr' = r(2R - 2r)$ et donc $r' = r\left(1 - \frac{r}{R}\right)$.

Exercice 2: Des configurations géométriques.

1). Avec 4 points distincts non alignés X_1, X_2, X_3 et X_4, on peut former exactement 4 triangles: $X_1X_2X_3$; $X_1X_2X_4$; $X_1X_3X_4$; $X_2X_3X_4$.
C'est 4 triangles ont deux sommets en commun deux à deux, jamais un seul. On a donc $t(4) = 4$.



Considérons 5 points distincts non alignés X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5.
On peut former 10 triangles avec ces 5 points.
$X_1X_2X_3$; $X_1X_2X_4$; $X_1X_2X_5$; $X_1X_3X_4$; $X_1X_3X_5$; $X_1X_4X_5$; $X_2X_3X_4$; $X_2X_3X_5$; $X_2X_4X_5$; $X_3X_4X_5$.
Il est clair que l'on ne peut pas former 2 triangles disjoints.
Deux triangles ont deux sommets en commun, par exemple $X_1X_2X_3$ et $X_1X_2X_4$.
On élimine ainsi $X_1X_3X_5$, $X_1X_4X_5$, $X_2X_3X_5$, $X_2X_4X_5$ et $X_3X_4X_5$ qui n'ont pas 0 ou 2 sommets en commun avec les 2 triangles choisis.
Il reste $X_1X_2X_5$, $X_1X_3X_4$ et $X_2X_3X_4$.
Si on choisit $X_1X_2X_5$, on élimine les 2 autres.
Si on choisit $X_1X_3X_4$ alors on élimine $X_1X_2X_5$ mais on peut garder $X_2X_3X_4$.
On obtient donc 4 triangles vérifiant la propriété.
Ainsi $t(5) = 4$.

Considérons 6 points distincts non alignés X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6.
On peut former 20 triangles avec ces 6 points.

$X_1 X_2 X_3$; $X_1 X_2 X_4$; $X_1 X_2 X_5$; $X_1 X_2 X_6$; $X_1 X_3 X_4$; $X_1 X_3 X_5$; $X_1 X_3 X_6$; $X_1 X_4 X_5$; $X_1 X_4 X_6$; $X_1 X_5 X_6$; $X_2 X_3 X_4$; $X_2 X_3 X_5$; $X_2 X_3 X_6$; $X_2 X_4 X_5$; $X_2 X_4 X_6$; $X_2 X_5 X_6$; $X_3 X_4 X_5$; $X_3 X_4 X_6$; $X_3 X_5 X_6$; $X_4 X_5 X_6$

Alors:

•soit on considère des triangles disjoints, et dans ce cas, il y a deux triangles possibles vérifiant la condition, par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_4 X_5 X_6$. En effet tout autre triangle a un unique sommet en commun avec un des deux triangles précédents.

• soit au moins 2 triangles ont 2 sommets en commun, par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$.

Alors seuls les triangles $X_1 X_3 X_4$ et $X_2 X_3 X_4$ ont au moins deux sommets en commun avec les 2 triangles précédents.
Tout autre triangle ayant deux sommets en commun avec un de ces 4 triangles, n'en a qu'un seul avec au moins un de ces quatre triangles.
Par suite, on obtient 4 triangles vérifiant la propriété.
En conclusion, $t(6) = 4$.

2). Remarquons que ($t(0) = t(1) = t(2) = 0$ et) $t(3) = 1$.
Soit n un entier naturel, $n \geq 3$.
On définit la propriété P_n : $t(n) \leq n$ pour tout $n \geq 3$.
Il est clair que $t(3) \leq 3$ donc P_3 est vraie.

Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence P_k est vraie pour tout entier $3 \leq k < n$.
(On appelle parfois une telle hypothèse, une récurrence forte).
Considérons alors $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, n points distincts non alignés du plan.

• Soit on construit des triangles disjoints 2 à 2 et alors il y a au plus $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \frac{n}{3} \leq n$ triangles construits.

• Soit au moins deux triangles ont 2 sommets en commun, par exemple $X_1 X_2 X_3$ et $X_1 X_2 X_4$.

On partitionne alors l'ensemble des triangles constructibles vérifiant la propriété avec les n points en 5 ensembles:
– $E_1 = \{X_1 X_2 X_3; X_1 X_2 X_4\}$;
– $E_2 = \{X_1 X_2 X_i \; ; \; 5 \leq i \leq n\}$;
– $E_3 = \{X_1 X_3 X_4; \; X_2 X_3 X_4\}$;
– $E_4 = \{X_3 X_4 X_i; \; 5 \leq i \leq n\}$;
– $E_5 = \{$ triangles constructibles vérifiant la propriété avec les points X_i, $5 \leq i \leq n\}$, c'est à dire les triangles constructibles vérifiant la propriété mais n'ayant pas les 2 sommets X_1 et X_2, ou X_3 et X_4 en commun.

Examinons alors les cas de regroupements de triangles vérifiant la propriété.
On ne peut pas réunir les ensembles E_1 et E_4, ni E_2 et E_3 ni E_2 et E_4 ni E_2 et E_5 ni E_4 et E_5 car alors les triangles construits ne vérifieraient pas la propriété.
Il est donc inutile d'étudier toutes les réunions. Il reste parmi les 32 cas possibles (de l'ensemble vide à la réunion des 5 ensembles):
◊ $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cup E_3$ et $E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Il suffit d'étudier $E_1 \cup E_2 \cup E_3$.
$E_1 \cup E_2 \cup E_3$ contient $(n-2)$ triangles vérifiant la propriété et aucun des autres triangles ne convient, puisqu'il aurait alors un seul sommet en commun avec les triangles déjà choisis.
On a $n - 2 \leq n$;
◊ $E_1 \cup E_3 \cup E_4$ revient au même que le cas précédent;
◊ Reste alors 3 réunions possibles $E_1 \cup E_5$, $E_3 \cup E_5$ ou $E_1 \cup E_3 \cup E_5$.
Il suffit d'étudier le cas $E_1 \cup E_3 \cup E_5$.
Par hypothèse de récurrence, comme il y a $(n-4)$ points dans l'ensemble $(X_i)_{5 \leq i \leq n}$, on sait que $\text{card}(E_5) \leq n - 4$.
De plus $\text{Card}(E_1) = \text{Card}(E_3) = 2$, d'où $\text{Card}(E_1 \cup E_3 \cup E_5) \leq 4 + (n-4) \leq n$, puisque les ensembles considérés sont disjoints et tous les triangles cités vérifient la propriété.

Dans tous les cas le nombre maximal de triangles constructibles est inférieur ou égal à n. La propriété P_n est vraie. La propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 3$. On a donc $t(n) \leq n$.

Démontrons alors que $t(n) = \begin{cases} n \text{ si } n = 4k \\ n-1 \text{ si } n = 4k+1 \\ n-2 \text{ si } n = 4k+2 \\ n-2 \text{ si } n = 4k+3 \end{cases}$.

On raisonne à nouveau par récurrence sur n.
La propriété est vraie pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$.
Soit alors n entier naturel, $n \geq 3$. On fait l'hypothèse de récurrence

$$t(p) = \begin{cases} p \text{ si } p = 4k \\ p-1 \text{ si } p = 4k+1 \\ p-2 \text{ si } p = 4k+2 \\ p-2 \text{ si } p = 4k+3 \end{cases} = \begin{cases} 4k \text{ si } p \equiv 0 \ \ (4) \text{ et } p = 4k \\ 4k \text{ si } p \equiv 1 \ \ (4) \text{ et } p = 4k+1 \\ 4k \text{ si } p \equiv 2 \ \ (4) \text{ et } p = 4k+2 \\ 4k+1 \text{ si } p \equiv 3 \ \ (4) \text{ et } p = 4k+3 \end{cases}.$$

On a montré précédemment que $t(n) = n-2$ ou $t(n) = 4 + t(n-4)$.
Ainsi par hypothèse de récurrence, comme $n - 4 \equiv n \ \ (4)$, alors on obtient:

- si $n = 4k$, alors $n - 4 = 4(k-1)$ d'où $t(n-4) = 4(k-1)$ et ainsi $t(n) = 4(k-1) + 4 = 4k = n$.
- si $n = 4k+1$, alors $n - 4 = 4(k-1) + 1$ et ainsi $t(n-4) = 4(k-1)$ d'où $t(n) = 4(k-1) + 4 = 4k$.
- si $n = 4k+2$, alors $n - 4 = 4(k-1) + 2$ et ainsi $t(n-4) = 4(k-1)$ d'où $t(n) = 4(k-1) + 4 = 4k$.
- si $n = 4k+3$, alors $n - 4 = 4(k-1) + 3$ et ainsi $t(n-4) = 4(k-1) + 1$ d'où $t(n) = 4(k-1) + 1 + 4 = 4k + 1$.

La propriété est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier n, $n \geq 3$.

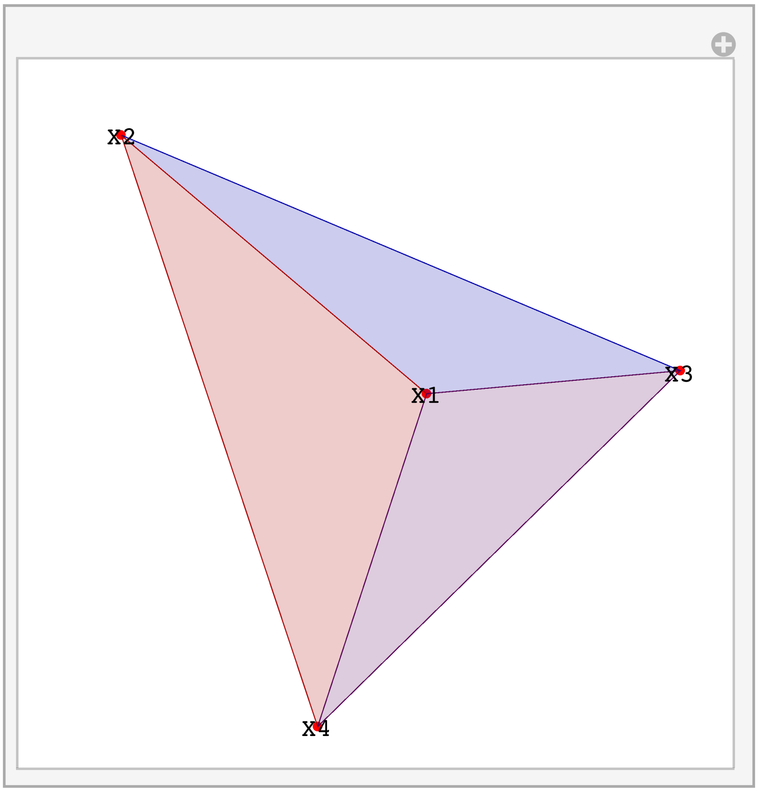
On ajoute à présent la condition suivante sur les triangles que l'on cherche à former:

Deux triangles distincts quelconques n'ont pas de points intérieurs en commun,

autrement dit ne peuvent pas se «chevaucher».
On note alors $u(n)$ le nombre maximal de triangles possibles (en tenant compte du positionnement des points initiaux).

3).

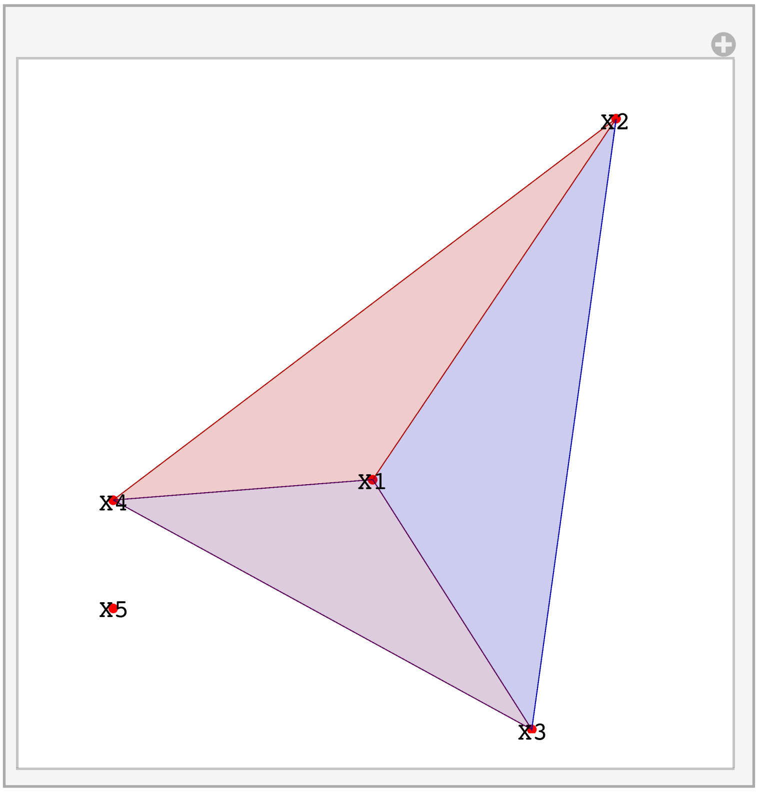
Pour $n = 4$:
Le graphique ci-dessous montre que $u(4) \geq 3$.



Le seul autre triangle constructible est $X_2 X_3 X_4$, qui chevauche les 3 autres.
Si d'autre part le point X_1, par exemple, n'est pas à l'intérieur du triangle $X_2 X_3 X_4$, alors quitte à réordonner les points, le

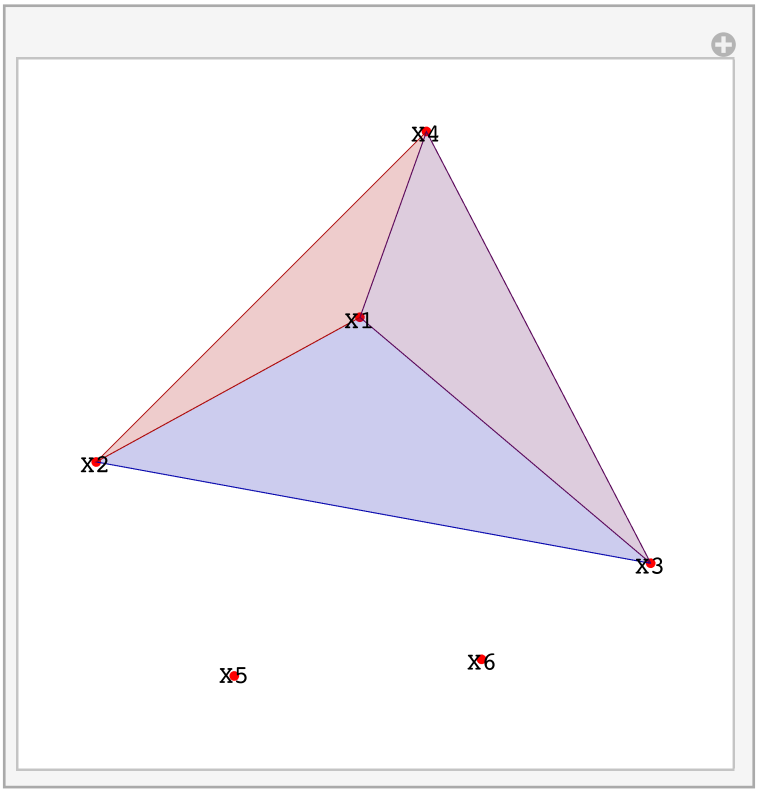
quadrilatère $X_1 X_2 X_3 X_4$ est convexe, ses diagonales se coupent à l'intérieur du quadrilatère. Il ne reste que 2 triangles ne se chevauchant pas.
Ainsi comme le point X_1 est ou intérieur ou extérieur au triangle $X_2 X_3 X_4$, on peut conclure que $u(4) = 3$.

Pour $n = 5$:
On a $u(5) = 3$.



En effet la configuration précédente convient donc $u(5) \geq 3$.
Puisque $t(5) = 4$, on peut au mieux ajouter 1 triangle. Vérifions qu'aucun autre triangle ne peut être construit.
Si on considère un triangle de sommet X_5, alors il ne peut pas avoir deux sommets en commun ou aucun avec les trois triangles précédents.
donc si on le choisit, on en élimine un des trois précédents, ce qui revient à éliminer un des 4 sommets.
Par suite, on est ramené au cas précédent avec 4 sommets.
donc $u(5) = 3$.

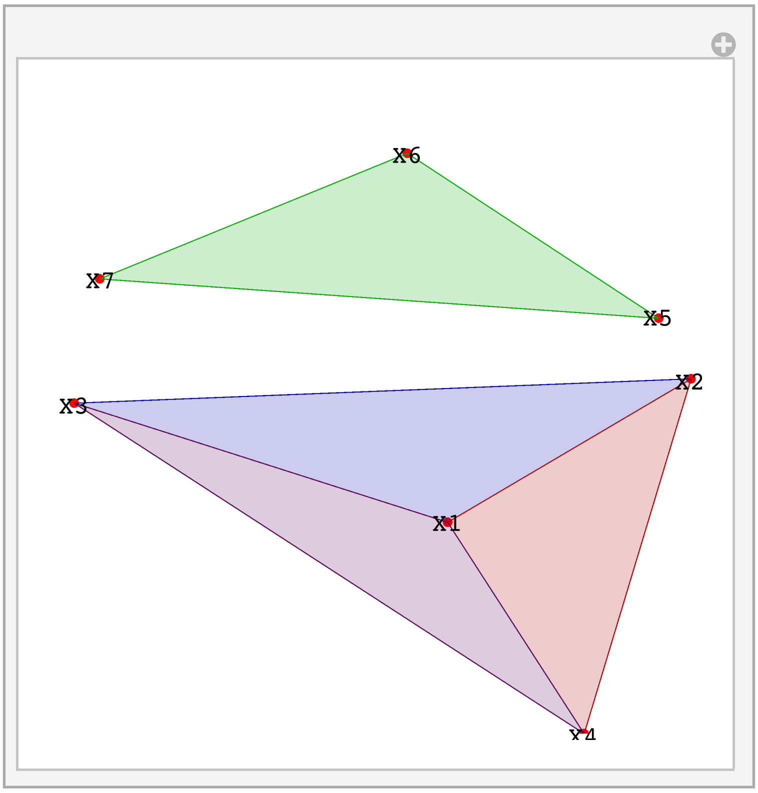
Pour $n = 6$:
On a $u(6) = 4$.



Rappelons que $t(6) = 4$ donc on peut au mieux ajouter 1 triangle.
En construisant un triangle avec un des deux sommets non utilisés par la configuration précédente, on utilise un des 4 sommets déjà utilisés.
On est alors obligé d'éliminer au moins un triangle de la configuration précédente.

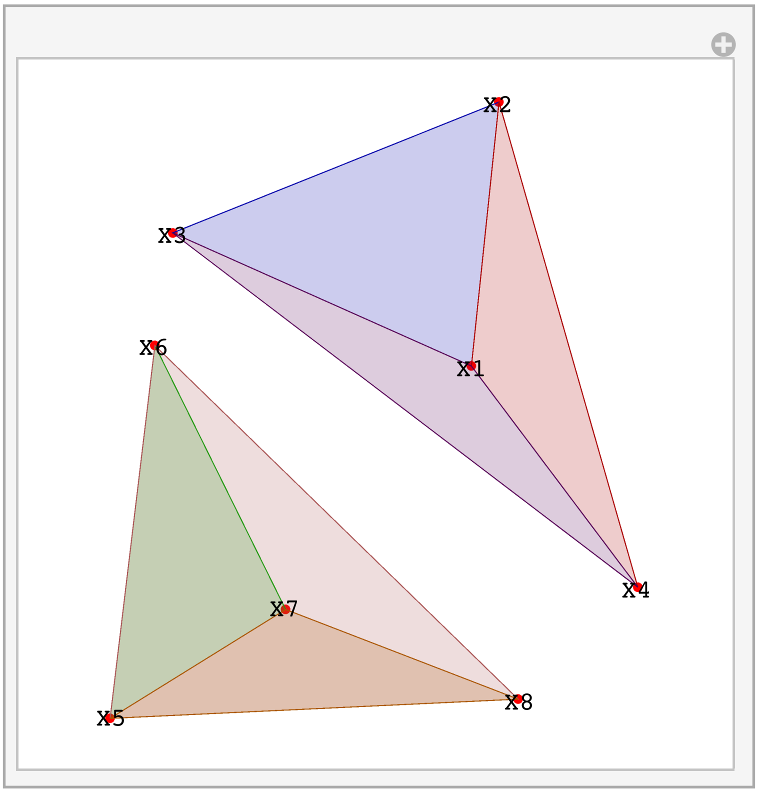
Remarque:
On ne peut pas construire plus de triangles respectant les mêmes propriétés, mais par contre on a plus de choix possibles de 4 triangles respectant les conditions.

Pour $n = 7$:
On a $u(7) = 4$.



La configuration montre que $u(7) \geq 4$ (rappelons que $t(7) = 5$, on pourra donc au maximum ajouter un seul triangle à priori).
En construisant un triangle supplémentaire, il semble clair que les deux règles cumulées entrainent l'élimination d'au moins un triangle déjà construit.
Par suite, on ne peut pas obtenir plus que 4.

Pour $n = 8$:
On a $u(8) = 6$.



On sait que $t(8) = 8$, on peut au mieux ajoter 2 triangles.
En faisant la liste des triangles restant possibles, soit on construit un triangle chevauchant les autres soit on ne respecte plus la règle des sommets.
En ajoutant un triangle à la construction proposée, on en élimine au moins un déjà construit.
On n'obtiendra pasp lus de 6 triangles respectant les 2 règles.

4). Soit n un entier naturel $n \geq 4$.

On définit pour n entier naturel ≥ 4, la propriété $P(n)$: $u(n) = \begin{cases} 3\,k \text{ si } n = 4\,k \\ 3\,k \text{ si } n = 4\,k+1 \\ 3\,k \text{ si } n = 4\,k+2 \\ 3\,k+1 \text{ si } n = 4\,k+3 \end{cases}$.

La propriété est vérifiée au rang 4, 5, 6 et 7 de la question précédente.
Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence $P(k)$ est vraie pour tout $k < n$.

On considère alors n points distincts du plan non alignés, $X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_n$.
Soit on construit des triangles tous disjoints, auquel cas, on obtient au plus $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ triangles.
Soit on construit deux triangles avec deux sommets en commun, par exemple $X_1\,X_2\,X_3$ et $X_1\,X_2\,X_4$.
Le cas $n = 4$, montre que l'on ne peut construire qu'un seul autre triangle, dans le cas où X_1 est intérieur au triangle $X_2\,X_3\,X_4$, le triangle $X_1\,X_3\,X_4$.
Tout autre triangle $X_1\,X_2\,X_k$ avec $k \geq 5$ est dès lors impossible à cause de la règle de non chevauchement.
De même tout autre triangle comportant deux des sommets $\{X_1; X_2; X_3; X_4\}$ et un autre sommet X_k, $k \geq 5$ est impossible: ou il ne respecte pas la règle des sommets ou celle du chevauchement.

Par suite, il reste tous les triangles ocnstructibles avec les $n - 4$ sommets restants, au nombre de $u(n-4)$.
Finalement $u(n) = u(n-4) + 3$.
Alors si:

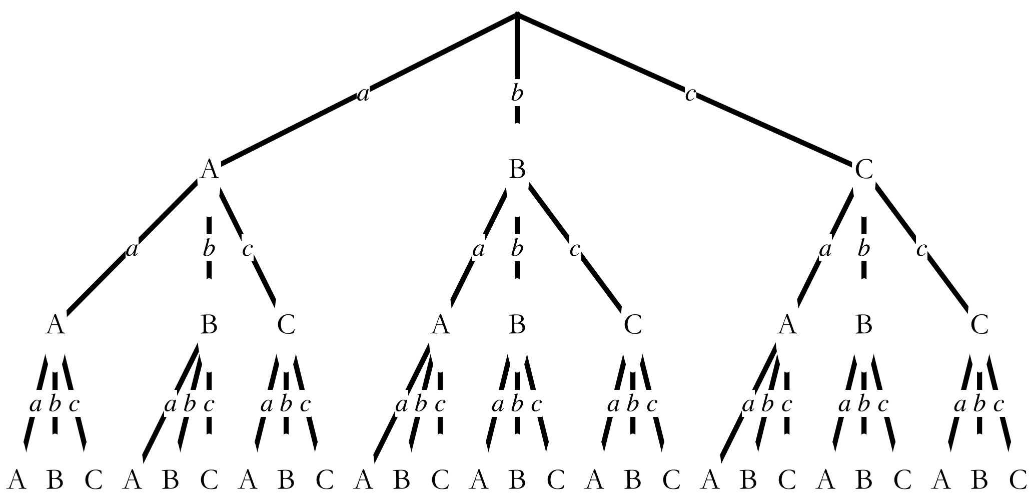
- $n = 4\,k$, $n - 4 = 4\,(k-1)$ d'où $u(n-4) = 3\,(k-1)$ et $u(n) = 3\,(k-1) + 3 = 3\,k$,
- $n = 4\,k+1$, $n - 4 = 4\,(k-1)+1$ d'où $u(n-4) = 3\,(k-1)$ et $u(n) = 3\,(k-1) + 3 = 3\,k$,

- $n = 4k + 2$, $n - 4 = 4(k-1) + 2$ d'où $u(n-4) = 3(k-1)$ et $u(n) = 3(k-1) + 3 = 3k$,
- $n = 4k + 3$, $n - 4 = 4(k-1) + 3$ d'où $u(n-4) = 3(k-1) + 1$ et $u(n) = 3(k-1) + 3 + 1 = 3k + 1$.

La propriété est héréditaire.
La propriété est vraie pour tout entier n, $n \geq 4$.

Problème: De la vie sur Mars!

1.(a). Remarquons que 3 cellules prises au hasard revient à choisir trois cellules l'une après l'autre indépendamment.
Remarquons aussi qu'étant donné que a, b et c sont des proportions, choisir une cellule n'influe pas sur la proportion de cellules.
On obtient l'arbre de probabilités:



L'événement "trois cellules au hasard sont compatibles" est l'événement "au moins deux cellules parmi les trois sont de la même espèce" et donc l'événement complémentaire de l'événement "parmi les trois cellules, aucune n'est de la même espèce".
Comme il y a trois espèces, cela revient donc à choisir 3 cellules, une de chaque espèce.
Cela revient aux 6 chemins: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
Chacun de ces chemins a pour probabilité $a\,b\,c$.
Ainsi la probabilité de l'événement "parmi les 3 cellules aucune n'est de la même espèce" est $6\,a\,b\,c$ et la probabilité p cherchée est donc $p = 1 - 6\,a\,b\,c$.

(b). Puisque $p = 1 - 6\,a\,b\,c$, montrer que $p \geq \frac{7}{9}$ revient à montrer que $6\,a\,b\,c \leq \frac{2}{9}$.
On sait que $a + b + c = 1$ d'où $c = 1 - a - b$ et donc $6\,a\,b\,c = 6\,a\,b(1 - a - b) = 6\,b(-a^2 + (1-b)\,a)$.
La fonction $a \mapsto -a^2 + (1-b)\,a$ admet un maximum sur $[0; 1]$ pour $a = -\frac{1-b}{2\times(-1)} = \frac{1-b}{2} \in [0; 1]$ puisque $b \in [0, 1]$ égal à $\frac{1}{4}(1-b)^2$.
Ainsi $6\,a\,b\,c \leq 6 \times \frac{1}{4}(1-b)^2 \times b \times c$ d'où $6\,a\,b\,c \leq \frac{3}{2}\,c\left(b^3 - 2\,b^2 + b\right)$
Étudions la fonction $f : b \mapsto b^3 - 2\,b^2 + b$ sur $[0; 1]$.
On a $f'(b) = 3\,b^2 - 4\,b + 1$.

Le discriminant de $f'(b)$ est $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ donc le trinôme admet deux racines: $b_1 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3} \in [0; 1]$ et $b_2 = 1$.

On en déduit que $f'(b) \geq 0$ pour $b \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ et $f'(b) \leq 0$ pour $b \in \left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

Ainsi la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

Elle admet donc un maximum en $b = \frac{1}{3}$ égal à $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$.

Finalement pour tous réels a et b de $[0; 1]$, $6\,a\,b\,c \leq \frac{3}{2}\,c \times \frac{4}{27}$ d'où $6\,a\,b\,c \leq \frac{2}{9}\,c$.

Alors comme $0 \leq c \leq 1$, on obtient $6\,a\,b\,c \leq \frac{2}{9}$ et donc $p \geq \frac{7}{9}$.

2.(a). Raisonnons pour le type A.
Les trois parents sont compatibles. On amontré à la question **1).** qu'alors $p_n = 1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n$.
Pour que la descendance soit du type A, ou les 3 parents sont de type A, ou deux seulement sont du type A et le dernier parent est du type B ou C.
On a les cas:

- AAA de probabilité a_n^3,
- AAB, ABA, BAA chacun de probabilité $a_n^2\,b_n$,
- AAC, ACA, CAA chacun de probabilité $a_n^2\,c_n$.

La probabilité de l'événement "la descendance est de type et les parents sont compatibles" est donc $a_n^3 + 3\,a_n^2\,b_n + 3\,a_n^2\,c_n = a_n^2(3\,b_n + 3\,c_n + a_n)$.
Or comme $a_n + b_n + c_n = 1$, on obtient $b_n + c_n = 1 - a_n$ d'où la probabilité est donnée par $a_n^2(3\,(1 - a_n) + a_n) = a_n^2(3 - 2\,a_n)$.

On a donc $a_{n+1} = \dfrac{p(\text{la descendance est du type } A \text{ et les parents sont compatibles})}{p(\text{les parents sont compatibles})} = \dfrac{a_n^2(3 - 2\,a_n)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}$.

On raisonne de même avec b_{n+1} et c_{n+1}.
En effet un descendant est du type B dans les cas BBB, BBA, BAB, ABB, BBC, BCB, CBB et de type C dans les cas CCC, CCA, CAC, ACC, CCB, CBC, BCC.

(b). Préliminaires:
Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x^2(3 - 2\,x) = -2\,x^3 + 3\,x^2$.
La fonction g est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) = -6\,x^2 + 6\,x = -6\,x(x - 1)$.
Or pour $x \in]0; 1[$, $-6\,x < 0$ et $x - 1 < 0$ donc $g'(x) > 0$: la fonction g est donc strictement croissante sur $[0; 1]$.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
On définit pour n entier naturel, la propriété P_n : $a_n > b_n > c_n$.
La propriété est vraie au rang 0 puisque par hypothès $a_0 > b_0 > c_0$.
Soit n un entier. On fait l'hypothèse de récurrence, P_n est vraie, c'est à dire $a_n > b_n > c_n$.
On sait par ailleurs que $a_n \in [0; 1]$, $b_n \in [0; 1]$ et $c_n \in [0; 1]$.
Alors comme la fonction g définie en préliminaires est strictement croissante sur $[0; 1]$ et comme par hypothèse de récurrence, $a_n > b_n > c_n$, on en déduit $g(a_n) > g(b_n) > g(c_n)$ d'où $a_n^2(3 - 2\,a_n) > b_n^2(3 - 2\,b_n) > c_n^2(3 - 2\,c_n)$.

Finalement comme $1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n > 0$, on obtient $\dfrac{a_n^2(3 - 2\,a_n)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n} > \dfrac{b_n^2(3 - 2\,b_n)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n} > \dfrac{c_n^2(3 - 2\,c_n)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}$ d'où $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$: la propriété P_{n+1} est vraie.
La propriété P_n est donc héréditaire.
La propriété P_n est vraie au rang 0 et est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
Ainsi pour tout entier naturel n, $a_n > b_n > c_n$.

On a $a_n > b_n > c_n$ donc $a_n + b_n + c_n > 3\,c_n$ et comme $a_n + b_n + c_n = 1$, $3\,c_n < 1$ d'où $c_n < \frac{1}{3}$.

On a aussi $3\,a_n > a_n + b_n + c_n$ donc $a_n > \frac{1}{3}$.

Enfin, $2\,b_n < a_n + b_n < 1$ d'où $b_n < \frac{1}{2}$.

(c). Soit n un entier.

$$(a_{n+1} - b_{n+1}) = \frac{a_n^2(3 - 2\,a_n)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n} - \frac{b_n^2(3 - 2\,b_n)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}.$$

$$(a_{n+1} - b_{n+1}) = \frac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left(a_n^2(3 - 2\,a_n) - b_n^2(3 - 2\,b_n)\right)$$

$$(a_{n+1} - b_{n+1}) = \frac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left[3\,(a_n - b_n)\,(a_n + b_n) - 2\,(a_n - b_n)\left(a_n^2 + a_n\,b_n + b_n^2\right)\right].$$

Or comme $a_n - b_n > 0$ pour tout entier n, $\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left(3\,(a_n + b_n) - 2\left(a_n^2 + a_n\,b_n + b_n^2\right)\right)$

Or $a_n + b_n = 1 - c_n$, d'où $3\,(a_n + b_n) - 2\left(a_n^2 + a_n\,b_n + b_n^2\right) = 3\,(1 - c_n) - 2\,(1 - c_n)^2 + 2\,a_n\,b_n$.

Ainsi $3\,(a_n + b_n) - 2\left(a_n^2 + a_n\,b_n + b_n^2\right) = 1 + c_n - 2\,c_n^2 + 2\,a_n\,b_n$.

Or comme $c_n < b_n < a_n$, alors $c_n^2 < a_n\,b_n$ d'où $-2\,c_n^2 + 2\,a_n\,b_n > 0$ et donc $3\,(a_n + b_n) - 2\left(a_n^2 + a_n\,b_n + b_n^2\right) > 1 + c_n$.

Enfin comme $0 < 1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n < 1$, $\frac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n} > 1$.

Fianlement $\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 1 \times (1 + c_n) > 1$: la suite $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels strictements positifs dont le rapport de deux termes consécutifs est > 1.
Par conséquent la suite $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

On a aussi:
$\frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} = \frac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left(3\,(a_n + c_n) - 2\left(a_n^2 + a_n\,c_n + c_n^2\right)\right)$ d'où $\frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} = \frac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\,(1 + b_n(1 - 2\,b_n) + 2\,a_n\,c_n)$.
Or comme $b_n < \frac{1}{2}$, $b_n(1 - 2\,b_n) > 0$ d'où $1 + b_n\,(1 - 2\,b_n) + 2\,a_n\,c_n > 1$ et ainsi $\frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} > 1$.
La suite $(a_n - c_n)_{n\geq 0}$ est donc strictement croissante.

(d). Les suites $(a_n - b_n)_{n\geq 0}$ et $(a_n - c_n)_{n\geq 0}$ sont strictement croissantes et bornées (par 1 par exemple puisque $0 < c_n < b_n < a_n < 1$).
Elles sont donc convergentes.
Par suite la suite $\left(\frac{1}{3}\,[(a_n - b_n) + (a_n - c_n) + 1]\right)_{n\geq 0}$ est aussi convergente.
Remarquons alors que pour tout entier naturel n,
$\frac{1}{3}\,[(a_n - b_n) + (a_n - c_n) + 1] = \frac{1}{3}\,[2\,a_n - (b_n + c_n) + 1] = \frac{1}{3}\,[2\,a_n - (1 - a_n) + 1] = a_n$.
Donc la suite (a_n) est convergente.
Partant comme $b_n = a_n - (a_n - b_n)$ et $c_n = a_n - (a_n - c_n)$, les suites (b_n) et (c_n) sont aussi convergentes.

Les relations de récurrence démontrées à la question **2.(a).**, donne en notant α, β, γ les limtes respectives des suites (a_n), (b_n), (c_n) et en utilisant $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, … le système $\begin{cases} \alpha = \dfrac{\alpha^2(3 - 2\,\alpha)}{1 - 6\,\alpha\,\beta\,\gamma} \\ \beta = \dfrac{\beta^2(3 - 2\,\beta)}{1 - 6\,\alpha\,\beta\,\gamma} \\ \gamma = \dfrac{\gamma^2(3 - 2\,\gamma)}{1 - 6\,\alpha\,\beta\,\gamma} \end{cases}$. De plus on sait que $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Supposons $\gamma \neq 0$. On obtient $1 = \dfrac{\gamma(3-2\gamma)}{1-6\alpha\beta\gamma}$ d'où $\gamma(3-2\gamma) = 1-6\alpha\beta\gamma \geq \dfrac{7}{9}$.

Par suite $-2\gamma^2 + 3\gamma - \dfrac{7}{9} \geq 0$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times\left(-\dfrac{7}{9}\right) = \dfrac{25}{9} > 0$, il admet 2 racines $\gamma_1 = \dfrac{-3-\sqrt{\frac{25}{9}}}{2\times(-2)} = \dfrac{7}{6}$ et $\gamma_2 = \dfrac{1}{3}$ et donc comme $-2 < 0$, on sait que $-2\gamma^2 + 3\gamma - \dfrac{7}{9} \geq 0$ pour $\gamma \in \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{7}{6}\right]$.

Or on a montré que $c_n < \dfrac{1}{3}$ pour tout entier n donc $\gamma \leq \dfrac{1}{3}$.

Par conséquent, si $\gamma \neq 0$, $\gamma = \dfrac{1}{3}$. Alors $\alpha + \beta = \dfrac{2}{3}$.

Comme $a_n + b_n > 2\,b_n > 2\,c_n$, il vient d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\,b_n = \dfrac{2}{3}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{3}$, cest à dire $\alpha = \beta = \dfrac{1}{3}$.

Or on a montré que la suite $(a_n - b_n)$ est strictement croissante, donc $a_n - b_n > a_0 - b_0$ et ainsi $\alpha - \beta > a_0 - b_0 > 0$.
Donc on ne peut pas avoir $\alpha = \beta$.
Par suite $\gamma = 0$.

On obtient alors $\alpha = \alpha^2(3-2\alpha)$ et comme $\alpha \geq \dfrac{1}{3} > 0$, α est solution de l'équation $2\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$.

Les solutions de cette équation du second degré sont $\dfrac{1}{2}$ et 1.

Or si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, comme $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $\gamma = 0$, on obtient $\beta = \dfrac{1}{2}$ d'où $\alpha = \beta$: impossible.
Par suite $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et γ=0.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

3.(a). Raisonnons pour le type A.
Un descendant est de type A dans les cas AAA, BBA, BAB, ABB, CCA, CAC, ACC.
Ainsi la probabilité de l'événement "le descendant est de type A et les parents sont compatibles" est donnée par $a_n^3 + 3\,a_n\,b_n^2 + 3\,a_n\,c_n^2 = a_n\left(a_n^2 + 3\,b_n^2 + 3\,c_n^2\right)$.

On obtient $a_{n+1} = \dfrac{a_n\left(a_n^2 + 3\,b_n^2 + 3\,c_n^2\right)}{1-6\,a_n\,b_n\,c_n}$.

Or $b_n^2 + c_n^2 = (b_n + c_n)^2 - 2\,b_n\,c_n = (1-a_n)^2 - 2\,b_n\,c_n$

De la même manière, $b_{n+1} = \dfrac{b_n\left(b_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2\right)}{1-6\,a_n\,b_n\,c_n}$ et $c_{n+1} = \dfrac{c_n\left(c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2\right)}{1-6\,a_n\,b_n\,c_n}$.

(b). On suppose à partir de maintenant que $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$.
On raisonne par récurrence sur n.
On définit pour n entier naturel, la propriété P_n : $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.
La propriété est vraie au rang 0: on a en effet $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$.
Soit n une entier.
On fait l'hypothèse de récurrence P_n est vraie, c'est à dire $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.

Il est clair que $1 > a_{n+1}$ sinon on aurait que des descendants de type A à la $(n+1)-$ ième génération, ce qui implique que $b_n = c_n = 0$, c'est à dire qu'il n'y ait plus de type B ou C à la génération précédente, contradictoire avec l'hypothèse de récurrence. En effet, s'il existe des types B ou C à la n-ième génération, la probabilité qu'il y ait des descendants de type B ou C à la génération suivante ne peut pas être nulle puisque l'événement BBB ou CCC a une probabilité non nulle.

Comme par hypothèse de récurrence, $c_n > 0$, alors $c_{n+1} = \dfrac{c_n\left(c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2\right)}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n} > 0$.

On a $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left[a_n\left(a_n^2 + 3\,b_n^2 + 3\,c_n^2\right) - b_n\left(b_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,c_n^2\right)\right]$ d'où $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left[a_n^3 - 3\,a_n^2\,b_n + 3\,a_n\,b_n^2 - b_n^3 + 3\,a_n\,c_n^2 - 3\,b_n\,c_n^2\right]$.

Ainsi $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left[(a_n - b_n)^3 + 3\,c_n^2(a_n - b_n)\right]$.

Alors comme par hypothèse de récurrence, $a_n > b_n$, $a_n - b_n > 0$ et donc $a_{n+1} - b_{n+1} > 0$ d'où $a_{n+1} > b_{n+1}$.

De même, $b_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}\left[(b_n - c_n)^3 + 3\,a_n^2(b_n - c_n)\right] > 0$ puisque $b_n > c_n$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi $b_{n+1} > c_{n+1}$.

Finalement on a $1 > a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1} > 0$: la propriété P_{n+1} est vraie.
La propriètè P_n est héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, on a donc $1 > a_n > b_n > c_n > 0$.

(c). On pose $f(c) = \dfrac{3}{2} - 3\,c + \dfrac{5}{2}\,c^2$ et $g(c) = 1 - 6\,c^2 + 12\,c^3$.

Soit n un entier. On a $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}$.

Déterminons le signe de $c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 - f(c_n)$.

On a : $c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 - f(c_n) = c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 - \left(\dfrac{3}{2} - 3\,c_n + \dfrac{5}{2}\,c_n^2\right) = 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 - \dfrac{3}{2}\,(1 - c_n)^2$.

Or comme $1 - c_n = a_n + b_n$, on en déduit $c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 - f(c_n) = 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 - \dfrac{3}{2}\,(a_n + b_n)^2 = \dfrac{3}{2}\,a_n^2 - 3\,a_n\,b_n + \dfrac{3}{2}\,b_n^2 = \dfrac{3}{2}\,(a_n - b_n)^2 \geq 0$.

Par suite $c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 \geq f(c_n)$.
Remarquons que $f(c_n) > 0$ (il suffit de calculer le discriminant < 0 pour vérifier que $f(c) > 0$ pour tout réel c).

Déterminons le signe de $(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) - g(c_n)$.
On a : $(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) - g(c_n) = (1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) - (1 - 6\,c_n^2 + 12\,c_n^3) = -6\,a_n(1 - a_n - c_n)\,c_n) + 6\,c_n^2 - 12\,c_n^3$ d'où $(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) - g(c_n) = -6\,a_n\,c_n + 6\,a_n^2\,c_n + 6\,a_n\,c_n^2 + 6\,c_n^2 + 12\,c_n^3 = -6\,c_n(a_n - c_n) + 6\,c_n(a_n^2 - c_n^2) + 6\,c_n^2(a_n - c_n)$.
$(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) - g(c_n) = 6\,c_n(a_n - c_n)\,(-1 + (a_n + c_n) + c_n) = 6\,c_n(a_n - c_n)\,(c_n - b_n)$.
Or comme $0 < c_n < b_n < a_n < 1$, $a_n - c_n > 0$ et $c_n - b_n < 0$ d'où $(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) - g(c_n) < 0$.
Finalement $(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) < g(c_n)$.

Remarquons que nous savons que $(1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) \geq \dfrac{7}{9} > 0$.

On a donc obtenu $c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2 \geq f(c_n) > 0$ et $0 < (1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n) < g(c_n)$ d'où $0 < \dfrac{1}{g(c_n)} < \dfrac{1}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n}$ et ainsi $\dfrac{c_n^2 + 3\,a_n^2 + 3\,b_n^2}{1 - 6\,a_n\,b_n\,c_n} \geq \dfrac{f(c_n)}{g(c_n)}$.

(d). La fonction $h = \dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $[0; 1]$.

(On peut vérifier que g ne s'annule pas sur $[0;1]$: $g'(c) = -12\,c + 36\,c^2 = 12\,c(3\,c-1)$ donc g est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{3};0\right]$: la fonction g atteint son minimum en $\frac{1}{3}$ sur $[0;1]$.

Or $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9} > 0$ donc $g(c) > 0$ pour tout $c \in [0;1]$.)

On a $h'(x) =$

$$\frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g(x)^2} = \frac{(-3+5\,c)\,(1-6\,c^2+12\,c^3) - 12\,c(3\,c-1)\left(\frac{3}{2} - 3\,c + \frac{5}{2}\,c^2\right)}{g(x)^2} = \frac{-30\,c^4 + 72\,c^3 - 72\,c^2 + 23\,c - 3}{g(x)^2}$$

Le nombre $h'(x)$ est du signe de $k(c) = -30\,c^4 + 72\,c^3 - 72\,c^2 + 23\,c - 3$ sur $[0;1]$.

On a $k'(c) = -120\,c^3 + 216\,c^2 - 144\,c + 23$ et $k''(c) = -360\,c^2 + 432\,c - 144$.

Le discriminant de $k''(c)$ est $-20\,736$ donc $k''(c) < 0$ pour tout réel c.

On en déduit donc que k' est décroissante sur $[0;1]$.

Or $k'(0) = 23 > 0$ et $k'(1) = -25 < 0$ donc k' admet une unique racine φ sur $[0;1]$.

On détermine que cette racine φ est dans $[0,227\,;\,0,228]$.

On en déduit que k est croissante sur $[0;\varphi]$ et décroissante sur $[\varphi;1]$: la fonction k atteint un maximum sur $[0;1]$ en $c = \varphi$.

On a $k(0,227) \approx -0,726\,555 < 0$ et $k(0,228) \approx -0,726\,549 < 0$.

En augmentant le pas, $k(c) < -0,725 < 0$ pour tout $c \in [0;1]$.

La fonction k étant un polynôme de degré 4, il semble raisonnable d'affirmer que $k(c) < 0$ pour tout $c \in [0;1]$.

Remarque:

On peut étudier plus profondément pour assurer que $k(c) < 0$ sur $[0;1]$.

Sinon on peut montrer en étudiant la différence $f(c) - g(c)$ sur $[0;1]$ que $f(c) \geq g(c) > 0$ sur $\left[0;\frac{1}{3}\right]$, ce qui suffit pour affirmer que $h(c) \geq 1$ pour $c \in \left[0;\frac{1}{3}\right]$.

Ainsi $h'(c) < 0$ pour tout $c \in [0;1]$ et ainsi h est strictement décroissante sur $[0;1]$.

Rappelons alors que $0 < c_n < \frac{1}{3}$ pour tout entier n. En effet comme $a_n + b_n + c_n = 1$ et $0 < c_n < b_n < a_n < 1$, on a $3\,c_n < 1$.

Ainsi $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq h\left(\frac{1}{3}\right)$ pour tout entier n.

Or $h\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ donc $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq 1$: la suite (c_n) est donc croissante.

Comme de plus elle est majorée, alors on sait que la suite (c_n) est convergente.

Notons γ sa limite.

De l'inégalité $\frac{c_{n+1}}{c_n} \geq h(c_n)$, on déduit par continuité $1 \geq h(\gamma)$ d'où $h\left(\frac{1}{3}\right) \geq h(\gamma)$.

Comme h est décroissante sur $[0;1]$, on en déduit $\gamma \geq \frac{1}{3}$.

De l'inégalité $c_n < \frac{1}{3}$, on déduit $\gamma \leq \frac{1}{3}$.

Fianlement $\gamma = \frac{1}{3}$: on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$.

Par suite comme $a_n + b_n = 1 - c_n$, on en déduit que la suite $(a_n + b_n)$ converge vers $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

De plus comme $c_n < b_n < a_n$, on a $2\,c_n < 2\,b_n < a_n + b_n$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2\,b_n = \frac{2}{3}$ d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3}$ et finalement comme $a_n = 1 - b_n - c_n$

que $\underset{n\to+\infty}{\text{Lim}}\ a_n = \frac{1}{3}$.

(e). Le deuxième.
Sinon, il aurait été difficile d'observer trois populations de cellules différentes.
On peut en effet imaginer que les cellules observées se sont déjà reproduites de nombreuses fois.
Si le scénario 1 correspondait, il n'y aurait plus que des cellules de type A a observer.