Concours Général des Lycées, 2012

Composition de Mathématiques (Classe Terminale S)

Durée: 5 heures.

La calculatrice est autorisée, conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix, à condition de l'indiquer clairement dans la copie.

Problème I: *Les premiers sont en haut, les exposants sont en bas.*

Pour tout entier $n \geq 2$, on dispose de la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ où les nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont les diviseurs premiers de n et les exposants $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont des entiers strictement positifs.

On pose alors $f(n) = a_1^{p_1} a_2^{p_2} \dots a_k^{p_k}$.

Par exemple, si $n = 720 = 2^4\, 3^2\, 5^1$, on a $f(n) = 4^2\, 2^3\, 1^5 = 128$.

En posant de plus $f(1) = 1$, on obtient une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

Enfin pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f^i(n)$ par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, de façon que $f^0(n) = n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^{i+1}(n) = f(f^i(n))$.

Par exemple: $f^0(720) = 720$, $f^1(720) = f(720) = 128$, $f^2(720) = f(128) = 49$.

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction f et des suites $(f^i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ pour n fixé.

1.(a) Calculer $f(2012)$.

(b) Déterminer les nombres $f^i\left(36^{36}\right)$ pour $0 \leq i \leq 3$.
Que peut-on dire des suivants ?

2.(a) Donner un exemple d'entier $n \geq 1$ tel que, pour tout entier naturel i, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$ et $f^{i+1}(n) \neq f^i(n)$.

(b) Montrer que la fonction f n'est ni croissante ni décroissante.

3. Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:

- **(a)** l'équation $f(n) = 1$;
- **(b)** l'équation $f(n) = 2$;
- **(c)** l'équation $f(n) = 4$.

4.(a) Pour tous entiers $a \geq 2$ et $b \geq 0$, montrer que $a\,b \leq a^b$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ des entiers tels que $a_i \geq 2$ et $b_i \geq 0$ pour tout i.
Montrer que $a_1 b_1 + \dots + a_k b_k \leq a_1^{b_1} \dots a_k^{b_k}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f(f(n)) \leq n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que, pour tout entier $i \geq r$, on ait $f^{i+2}(n) = f^i(n)$.

5. Soit E l'ensemble des entiers $n \geq 2$ n'ayant que des exposants strictement supérieurs à 1 dans leur décomposition en facteurs premiers.

(a) Pour tout entier $a \geq 2$, montrer qu'il existe des entiers naturels α et β tels que $a = 2\alpha + 3\beta$.

(b) En déduire que si n appartient à E, alors il existe un élément m de E tel que $f(m) = n$.

(c) Donner un élément m de E tel que $f(m) = 2012^{2012}$.

(d) Que peut-on dire de la réciproque du **(b)** ?

Problème II: *Une suite majoritairement décroissante.*

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geq 1$, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ soient supérieurs ou égaux à $2\,u_n$.
Montrer que u_n tend vers 0.

Problème III: *Le facteur sonne toujours une fois (et une seule).*

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées $1, 2, \ldots, n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le facteur doit distribuer une lettre par maison.

Pour cela, il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y dépose la lettre correspondante; puis il distribue les autres lettres dans les autres maisons, et revient enfin à la maison 1 récupérer son vélo.

Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.

Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est 1, 5, 2, 4, 3, 1. La distance totale parcourue, appelé longueur du trajet, vaut 12 dans ce cas car $|5-1| + |2-5| + |4-2| + |3-4| + |1-3| = 12$.
Un autre trajet possible est 1, 3, 5, 4, 2, 1 de longueur 8.

1. Combien y a-t-il de trajets possibles ?

2. (a) Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2\,(n-1)$.

(b) Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

3. (a) Dans le cas $n = 5$ et $n = 6$, déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.

(b) Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.

4. On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables). Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?