

# Concours Général: Séquence 1

## Énoncé 1:

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels telle que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sum_{i=0}^n x_i^3 = \left( \sum_{i=0}^n x_i \right)^2$ .

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un entier naturel  $m$  tel que  $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}$ .

## Énoncés 2

### ■ Question A:

Combien de suites de taille 1997 peuvent être formées avec un nombre impair de chacune des lettres  $A, B, C$  ?

### ■ Question B:

Trouver le nombre de mots de l'alphabet  $\{a; b; c\}$  avec  $n$  lettres et un nombre pair de  $a$ .

### ■ Question C:

Dans les mots de l'alphabet  $\{a; b; c\}$ , soient  $A_n$  l'ensemble des mots de longueur  $n$  qui ne contiennent pas de suite  $aa$  ou  $bb$  et  $B_n$  celui des mots de longueur  $n$  dont aucun sous-mot de 3 lettres contient toutes les lettres  $a, b$  et  $c$ .

Prouver que  $\text{card}(B_{n+1}) = 3 \text{card}(A_n)$ .

## Énoncés 3

### ■ Question A:

Combien de sous-ensembles de  $\{1; 2; 3; \dots; n\}$  y a-t-il sans nombres consécutifs ?

### ■ Question B:

Combien de mots à  $n$  chiffres de l'alphabet  $\{0; 1; 2; 3\}$  ont:

- un nombre pair de zéros ?
- un nombre pair de zéros et de uns ?

## Énoncé 4

Jean, lorsqu'il monte les escaliers de sa maison, saute parfois une marche, parfois 2.

Si l'escalier a 10 marches, de combien de façons différentes peut-il arriver en haut ?

Généraliser.

## Énoncés 5

### ■ Question A:

Quel est le plus grand nombre de parties dans lesquelles 7 droites séparent le plan ?  
Généraliser.

### ■ Question B:

La même, mais cette fois avec des cercles !

---

## Énoncé 6

### ■ Question A:

Prouver que  $\frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n$  est entier pour tout  $n > 0$ .

### ■ Question B:

Prouver que la partie entière de  $(1+\sqrt{3})^{2n+1}$  est paire pour tout entier  $n$ .