Concours Général: Séquence 1

Correction

Énoncé 1:

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que pour tout entier naturel n , $\sum_{i=0}^n x_i^3 = \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)^2$.

Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}$.

On définit la propriété $P(n)$: il existe un entier naturel m tel que $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}$.

Initialisation:

Au rang $n = 0$:

On sait que $\sum_{i=0}^0 x_i^3 = \left(\sum_{i=0}^0 x_i\right)^2$, c'est à dire que $x_0^3 = x_0^2$.

Déterminons les nombres réels tels que $x_0^3 = x_0^2$.

Il faut $x_0^3 - x_0^2 = 0$ d'où $x_0^2(x_0 - 1) = 0$ d'où $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Ainsi $\sum_{i=0}^0 x_i = x_0 = 0$ ou $\sum_{i=0}^0 x_i = x_0 = 1$.

Remarquons alors qu'en posant $m = 0$, $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$ et en posant $m = 1$, $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$.

Dans tous les cas, il existe un entier naturel m tel que $\sum_{i=0}^0 x_i = \frac{m(m+1)}{2}$.

La propriété $P(0)$ est vraie.

Hérédité:

Soit n un entier.

On fait l'hypothèse de récurrence $P(n)$ est vraie, c'est à dire qu'il existe un entier naturel m tel que $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}$.

On a $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \sum_{i=0}^n x_i + x_{n+1}$ et donc par hypothèse de récurrence, $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m(m+1)}{2} + x_{n+1}$.

D'autre part, on sait que $\sum_{i=0}^{n+1} x_i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n+1} x_i\right)^2$.

Or:

$$\bullet \sum_{i=0}^{n+1} x_i^3 = \sum_{i=0}^n x_i^3 + x_{n+1}^3 = \left(\sum_{i=0}^n x_i\right)^2 + x_{n+1}^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + x_{n+1}^3 = \frac{1}{4} m^2(m+1)^2 + x_{n+1}^3, \text{ puisque par hypothèse de}$$

récurrence $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}$.

$$\bullet \left(\sum_{i=0}^{n+1} x_i \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^n x_i + x_{n+1} \right)^2 = \left(\frac{m(m+1)}{2} + x_{n+1} \right)^2 = \frac{1}{4} m^2(m+1)^2 + m(m+1)x_{n+1} + x_{n+1}^2, \text{ puisque par hypothèse de}$$

récurrence $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}.$

On en déduit l'égalité $\frac{1}{4} m^2(m+1)^2 + x_{n+1}^3 = \frac{1}{4} m^2(m+1)^2 + m(m+1)x_{n+1} + x_{n+1}^2$ d'où x_{n+1} est une solution de l'équation $X^3 - X^2 - m(m+1)X = 0.$

Réolvons cette équation.

$$X^3 - X^2 - m(m+1)X = 0 \text{ s'écrit } X(X^2 - X - m(m+1)) = 0 \text{ d'où } X = 0 \text{ ou } X^2 - X - m(m+1) = 0.$$

Le discriminant de $X^2 - X - m(m+1) = 0$ est

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m(m+1)) = 1 + 4m(m+1) = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 > 0.$$

Ainsi l'équation $X^2 - X - m(m+1) = 0$ admet 2 solutions $X_1 = \frac{1 - (2m+1)}{2} = -m$ ou $X_2 = \frac{1 + 2m + 1}{2} = m + 1.$

Finalement on a montré que $x_{n+1} = 0$ ou $x_{n+1} = -m$ ou $x_{n+1} = m + 1.$

• Si $x_{n+1} = 0$, alors $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m(m+1)}{2} + 0 = \frac{m(m+1)}{2}$: on pose $m' = m$, et il existe donc un entier naturel m tel que

$$\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}.$$

• Si $x_{n+1} = -m$, alors $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m(m+1)}{2} - m = \frac{m(m-1)}{2}.$

• Si $m = 0$, alors $x_{n+1} = -0 = 0$ et alors $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{0(0+1)}{2}$: on pose $m' = m = 0$ et il existe donc un entier naturel m'

tel que $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}.$

• Si $m > 0$, on pose alors $m' = m - 1.$

$m' \in \mathbb{N}$ et on a $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}$: il existe donc un entier naturel m' tel que $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}.$

• Si $x_{n+1} = m + 1$, $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{m^2 + 3m + 2}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$

On pose $m' = m + 1$, et on a $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}$: il existe donc un entier naturel m' tel que $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}.$

Dans tous les cas, on a montré qu'il existe un entier naturel m' tel que $\sum_{i=0}^{n+1} x_i = \frac{m'(m'+1)}{2}.$

La propriété $P(n+1)$ est vraie et la propriété $P(n)$ est héréditaire.

Conclusion:

La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0.$

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n.$

Ainsi pour tout entier naturel n , il existe un entier naturel m tel que $\sum_{i=0}^n x_i = \frac{m(m+1)}{2}.$

Énoncés 2

■ Question A:

Soit n un entier et S une suite de taille n formée avec les lettres A, B et C .

On note n_A, n_B et n_C le nombre de lettres A, B et C dans la suite S .

À priori, 4 cas de figures pour n_A, n_B et n_C :

- 3 nombres pairs: la somme des 3 est paire,
- 2 pairs et 1 impair: la somme des 3 est impaire,
- 1 pair et 2 impairs: la somme des 3 est paire,
- 3 impairs: la somme des 3 est impaire.

Mais comme $n_A + n_B + n_C = n$ alors il vient que pour chaque entier n :

- si n est pair, la suite S contient ou des nombres pairs de lettres A, B et C ou un nombre pair d'une des 3 lettres et des nombres impairs des 2 lettres restantes,
- si n est impair, la suite S contient ou des nombres impairs de lettres A, B et C ou un nombre impair d'une des 3 lettres et des nombres pairs des 2 lettres restantes.

Remarquons alors que pour obtenir une suite de taille n , on a obtenu une suite de taille $n-1$ à laquelle on rajoute une des 3 lettres.

Considérons un entier n impair et une suite de taille n .

On ajoute donc une lettre à une suite de taille $(n-1)$, avec $(n-1)$ pair.

Supposons que la suite contienne des nombres impairs des 3 lettres A, B et C .

Comme on a ajouté une lettre, cela implique que la suite a été obtenue à partir d'une suite de taille $(n-1)$ contenant un nombre pair d'une des lettres et des nombres impairs des 2 autres lettres.

De plus, il a fallu ajouter la lettre contenu un nombre pair de fois.

Cela entraîne donc qu'il y a autant de suite de taille n ayant des nombres impairs des 3 lettres A, B et C que de suites de tailles $(n-1)$ ayant un nombre pair d'une des 3 lettres et des nombres impairs des 2 autres lettres.

Ainsi $(3 \text{ Impairs})_n = (2 \text{ I } 1 \text{ P})_{n-1}$ ou encore $(3 \text{ I})_{2k+1} = (2 \text{ I } 1 \text{ P})_{2k}$.

Considérons un entier n pair et une suite de taille n .

On ajoute donc une lettre à une suite de taille $(n-1)$, avec $(n-1)$ impair.

Supposons que la suite contienne des nombres pairs des 3 lettres A, B et C .

Comme on a ajouté une lettre, cela implique que la suite a été obtenue à partir d'une suite de taille $(n-1)$ contenant un nombre impair d'une des lettres et des nombres pairs des 2 autres lettres.

De plus, il a fallu ajouter la lettre contenu un nombre impair de fois.

Cela entraîne donc qu'il y a autant de suite de taille n ayant des nombres pairs des 3 lettres A, B et C que de suites de tailles $(n-1)$ ayant un nombre impair d'une des 3 lettres et des nombres pairs des 2 autres lettres.

Ainsi $(3 \text{ P})_n = (1 \text{ I } 2 \text{ P})_{n-1}$ ou encore $(3 \text{ P})_{2k} = (1 \text{ I } 2 \text{ P})_{2k-1}$.

Remarquons finalement que pour tout entier n , il y a 3^n suites de taille n et donc que:

- pour n pair $(3 \text{ P})_n + (2 \text{ I } 1 \text{ P})_n = 3^n$ d'où $(2 \text{ I } 1 \text{ P})_{2k} = 3^{2k} - (3 \text{ P})_{2k}$
- pour n impair $(3 \text{ I})_n + (1 \text{ I } 2 \text{ P})_n = 3^n$ d'où $(1 \text{ I } 2 \text{ P})_{2k+1} = 3^{2k+1} - (3 \text{ I})_{2k+1}$.

On en déduit $(3 \text{ I})_{2k+1} = (2 \text{ I } 1 \text{ P})_{2k} = 3^{2k} - (3 \text{ P})_{2k} = 3^{2k} - (1 \text{ I } 2 \text{ P})_{2k-1} = 3^{2k} - (3^{2k-1} - (3 \text{ I})_{2k-1})$.

Ainsi $(3 \text{ I})_{2k+1} = (3 \text{ I})_{2k-1} + (3^{2k} - 3^{2k-1}) = (3 \text{ I})_{2k-1} + 2 \times 3^{2k-1}$ pour tout entier $k \geq 1$.

Autrement dit le nombre de suites de taille n , avec n impair est la somme du nombre de suites de taille $n-2$ et de 2 fois le nombre de mots de taille $n-2$.

On a clairement $(3 \text{ I})_3 = 6$ (chaque lettre est comptée au moins une fois, et donc une seule fois: il y a 6 possibilités $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$).

Soit n un entier impair.

Ainsi le nombre $(3 \text{ I})_n$ de suites de taille n avec $n \geq 3$, est donné par
$$\begin{cases} (3 \text{ I})_n = (3 \text{ I})_{n-2} + 2 \times 3^{n-2} \\ (3 \text{ I})_3 = 6 \end{cases}.$$

Un raisonnement par récurrence immédiat montre alors que $(3I)_n = 6 \times \sum_{k=0}^{\frac{(n-3)}{2}} 3^{2k+1}$.

Alors on en déduit que pour tout entier n impair $(3I)_n = 6 \times \sum_{k=0}^{\frac{(n-3)}{2}} 9^k = 6 \times \frac{9^{\frac{(n-1)}{2}} - 1}{9 - 1} = \frac{3}{4} \left(9^{\frac{(n-1)}{2}} - 1 \right)$.

Par suite $(3I)_{1997} = \frac{3}{4} \times (9^{998} - 1)$.

On obtient:

16 183 993 071 506 033 422 777 542 770 043 153 430 824 652 661 436 930 720 480 444 553 802 :
 650 613 215 513 789 735 985 832 080 380 658 107 490 284 223 567 375 821 957 115 146 995 450 :
 439 948 279 649 015 171 128 452 892 408 240 529 438 717 866 930 354 819 662 215 917 987 791 :
 707 630 179 730 464 949 078 709 701 980 887 212 275 017 642 616 717 445 353 129 231 290 449 :
 546 535 418 883 438 135 592 573 301 145 157 821 941 320 635 614 875 373 478 036 808 607 585 :
 780 047 034 726 582 059 837 723 065 791 152 197 734 279 131 032 179 148 988 475 279 196 935 :
 814 195 293 513 702 676 757 635 655 942 551 550 727 837 009 033 931 084 664 237 565 065 559 :
 289 259 053 313 567 563 395 741 608 447 943 664 542 000 872 441 556 010 259 474 482 770 213 :
 221 874 855 658 133 929 995 526 344 703 351 252 048 794 581 050 155 394 226 439 882 556 238 :
 444 309 018 945 042 523 581 444 843 988 313 039 949 089 672 960 722 749 129 155 178 207 117 :
 077 927 332 066 093 382 190 774 035 337 138 381 088 886 500 718 681 656 588 899 862 551 871 :
 118 256 914 684 808 887 773 057 332 716 573 752 511 809 288 221 531 780 073 733 978 480 672 :
 649 103 299 481 059 031 877 710 082 741 176 310 495 717 806 832 789 913 804 018 053 405 224 :
 908 160 499 077 595 466 723 654 844 054 464 004 166 589 572 398 649 170 740

■ Question B:

On considèrera 0 lettre a comme un nombre pair de a .

Notons que pour $n = 1$, il y a 2 mots contenant 0 lettre a , le mot b et le mot c .

Soit n un entier, $n \geq 2$.

On note P_n le nombre de mots de n lettres contenant un nombre pair de a .

Un mot de n lettres contenant un nombre pair de a , peut-être:

- ou un mot de $(n - 1)$ lettres contenant un nombre pair de a auquel on ajoute la lettre b ou la lettre c : il y en a donc $2P_{n-1}$.
- ou un mot de $(n - 1)$ lettres contenant un nombre impair de a auquel on ajoute une lettre a : il y en a $3^{n-1} - P_{n-1}$.

Finalement on obtient donc que $P_n = 2P_{n-1} + 3^{n-1} - P_{n-1} = P_{n-1} + 3^{n-1}$ avec $P_1 = 2$.

On a donc $P_n - P_{n-1} = 3^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Remarquons alors que $P_n = (P_n - P_{n-1}) + \dots + (P_2 - P_1) + P_1 = \sum_{i=1}^{n-1} 3^i + P_1 = 3 \times \frac{3^{n-1} - 1}{2} + 2 = \frac{3^n + 1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Si on ne veut pas des mots contenant aucun a , il suffit alors de remarquer que quel que soit l'entier $n \geq 1$, il y a 2^n mots de n lettres comportant les lettres b et c seulement.

Ainsi pour tout entier naturel $n \geq 1$, il a $\frac{3^n + 1}{2} - 2^n$ mots de n lettres ayant un nombre pair non nul de a .

■ Question C:

Énoncés 3

■ Question A:

On note $\{1; 2; \dots; n\} = \llbracket 1; n \rrbracket$.

Déterminons une formule de récurrence.

Notons C_n le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sans nombres consécutifs.

On inclut l'ensemble vide $\emptyset$ dans l'ensemble des sous-ensembles sans nombres consécutifs. Celui-ci ne contenant aucun nombre, ne contient pas de nombres consécutifs.

Un sous-ensemble de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est un sous-ensemble de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

Par suite tous les sous-ensembles sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n \rrbracket$ sont aussi des sous-ensembles sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.

On peut donc affirmer qu'il y a C_n sous-ensembles sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ ne contenant pas le nombre $n+1$.

Il reste à dénombrer les sous-ensembles sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le nombre $n+1$.

Comme n et $n+1$ sont consécutifs, un sous-ensemble sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le nombre $n+1$ ne contient pas n .

Ainsi tout sous-ensemble sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le nombre $n+1$ est un sous-ensemble sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ auquel on ajoute le nombre $n+1$.

Il est clair qu'un tel sous ensemble convient.

Réciproquement si on a un sous-ensemble sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le nombre $n+1$, on peut l'écrire comme la réunion d'un sous-ensemble sans nombres consécutifs d'entiers de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et du singleton $\{n+1\}$.

Finalement comme un-ensemble sans nombres consécutifs de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ contenant le nombre $n+1$, ou contient $n+1$ ou ne le contient pas, on peut en déduire que $C_{n+1} = C_n + C_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 2$.

On a de plus $C_1 = 2$ (les sous-ensembles de $\{1\}$ sans nombres consécutifs sont $\emptyset$ et $\{1\}$) et $C_2 = 3$ (les sous-ensembles de $\{1; 2\}$ sans nombres consécutifs sont $\emptyset$, $\{1\}$ et $\{2\}$).

On en déduit que le nombre C_n de sous-ensembles de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est donné par
$$\begin{cases} C_n = C_{n-1} + C_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2 \\ C_1 = 2 \text{ et } C_2 = 3 \end{cases}.$$

On reconnaît les nombres de Fibonacci.

On a ici $C_n = F_{n+2}$ où F_n est le n^{e} nombre de Fibonacci.

La forme explicite de F_n est
$$\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Par suite pour tout entier $n \geq 1$,
$$C_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+2} - (1 - \sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2} \sqrt{5}}.$$

■ Question B:

Combien de mots à n chiffres de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ ont:

- un nombre pair de zéros ?
- un nombre pair de zéros et de uns ?

• un nombre pair de zéros:

On comptera dans les mots contenant un nombre pair de zéros les nombres ne contenant aucun zéros.

Remarquons qu'il est facile de déterminer combien il y en a: 3^n mots possibles.

Pour tout entier n , on note Z_n le nombre de mots à n chiffres de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ ayant un nombre pair de zéros.

Soit n un entier, $n \geq 2$.

Les mots à n chiffres de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ sont:

◊ ou les mots à $n-1$ chiffres de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ contenant un nombre pair de 0 auxquels on adjoint le nombre 1, ou le nombre 2 ou le nombre 3: il y en a $3 Z_{n-1}$.

◊ ou les mots à $n-1$ chiffres de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ contenant un nombre impair de 0 auxquels on adjoint le nombre 0 :

il y en a $4^{n-1} - Z_{n-1}$ (toutes les possibilités auxquelles on soustrait les cas ayant un nombre pair de zéros).

Remarque:

On pourrait se demander où adjoindre le nombre. En dernière place semble le plus facile.

Il est inutile ici de dénombrer toutes les façons de placer un chiffre parmi les $n - 1$ chiffres du mot, tous les mots étant comptés.

Le plus simple est d'observer la situation comme un arbre.

Finalement, on en déduit que $Z_n = 3 Z_{n-1} + 4^{n-1} - Z_{n-1} = 2 Z_{n-1} + 4^{n-1}$.

On a de plus $Z_1 = 3$ (il y a 3 mots de 1 chiffre de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ ne contenant aucun 0).

Ainsi les nombres (Z_n) sont les termes de la suite définie par
$$\begin{cases} Z_n = 2 Z_{n-1} + 4^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \\ Z_1 = 3 \end{cases}.$$

Montrons alors par récurrence que $Z_n = 3 \times 2^{n-1} + 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} 2^i$ pour tout $n \geq 2$.

Pour $n = 2$, on a $Z_2 = 10$ et $3 \times 2^{2-1} + 2^{2-1} \sum_{i=1}^{2-1} 2^i = 6 + 2 \times 2 = 10$.

Soit un entier $n \geq 2$.

On suppose donc que $Z_n = 3 \times 2^{n-1} + 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} 2^i$.

Or on sait que $Z_{n+1} = 2 Z_n + 4^{(n+1)-1} = 2 Z_n + 4^n$ d'où par hypothèse de récurrence $Z_n = 2 \left(3 \times 2^{n-1} + 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} 2^i \right) + 2^{2n}$.

Alors $Z_{n+1} = 3 \times 2^n + 2^n \sum_{i=1}^{n-1} 2^i + 2^n \times 2^n$ et ainsi $Z_{n+1} = 3 \times 2^{(n+1)-1} + 2^{(n+1)-1} \sum_{i=1}^{(n+1)-1} 2^i$.

D'où la formule.

On a donc $Z_n = 3 \times 2^{n-1} + 2^{n-1} \times 2 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} (2^n + 1)$.

- un nombre pair de zéros et de uns:

Soit n un entier naturel $n \geq 1$.

Notons U_n le nombre de mots de n lettres comportant un nombre pair de zéros et de uns.

On comptera aucun zéro et aucun un comme un nombre pair de zéros et de uns.

Remarquons alors qu'un mot de n lettres comportant un nombre pair de zéros et de uns est:

◊ soit un mot de $(n - 1)$ lettres comportant un nombre pair de zéros et de uns auquel on a ajouté un 2 ou un 3: il y a donc $2 U_{n-1}$ mots de cette forme;

◊ soit un mot de $(n - 1)$ lettres comportant un nombre impair de zéros et de uns auquel on a ajouté un zéro ou un 1: il y a donc $2 \times (4^{n-1} - U_{n-1})$ mots de cette forme.

Au final, on obtient donc $U_n = 2 U_{n-1} + 2 (4^{n-1} - U_{n-1}) = 2 \times 4^{n-1} = \frac{4^n}{2}$.

On peut remarquer que la moitié des mots de n lettres constitués des lettres de l'alphabet $\{0; 1; 2; 3\}$ ont un nombre pair de 0 et de 1.

Il y a de plus 2^n mots de n lettres ne comportant aucun 0 et aucun 1.

Ainsi il reste $\frac{4^n}{2} - 2^n = 2^n (2^{n-1} - 1)$ mots de n lettres ayant un nombre pair strictement positif de zéros et de uns

Énoncé 4

- Pour 10 marches:

Pour poser le pied sur la 10^e marche, Jean a pu poser le pied sur la 9^e marche et monter la dernière, poser le pied sur la 8^e et sauter la 9^e ou poser le pied sur la 7^e et sauter la 8^e et la 9^e marche.

Ainsi le nombre de façons différentes d'arriver à la 10^e marche est la somme de toutes les façons d'arriver à la 9^e avec toutes les façons d'arriver à la 8^e avec toutes les façons d'arriver à la 7^e.

On pose F_n le nombre de façons d'arriver à la n^{e} marche.

On a donc $F_{10} = F_9 + F_8 + F_7$.

De même, le nombre de façons d'atteindre la 9^{e} marche est la somme de toutes les façons d'atteindre la 8^{e} , avec celles d'atteindre la 7^{e} , avec celles d'atteindre la 6^{e} .

etc...

Or on a $F_1 = 1$ (on ne peut pas sauter de marches pour aller du sol à la $1^{\text{ère}}$, $F_2 = 2$ (on monte une à une ou on saut la $1^{\text{ère}}$) et $F_3 = 4$ (on monte une à une, on saute la première et on monte la dernière, on saute les deux premières, on monte la première et on saute la deuxième).

On obtient $F_{10} = F_9 + F_8 + F_7 = (F_8 + F_7 + F_6) + (F_7 + F_6 + F_5) + (F_6 + F_5 + F_4) = \dots$

D'où $F_{10} = 24 F_1 + 37 F_2 + 44 F_3 = 274$ façons différentes d'atteindre la 10^{e} marche.

• Pour n marches le raisonnement tient toujours.

On a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$ pour tout $n \geq 4$ et $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \\ F_3 = 4 \end{cases}$.

Énoncés 5

Énoncé 6

■ Question A:

On note $A_n = \frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n$ et $B_n = \frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n - \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n$ pour tout $n > 0$.

On définit pour $n > 0$, entier naturel, la propriété P_n : « il existe des entiers relatifs p et q tels que $A_n = p$ et $B_n = \frac{q}{\sqrt{5}}$ ».

On raisonne par récurrence sur $n > 0$.

Pour $n = 1$, on a $\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^1 + \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} (4\sqrt{5} - 2\sqrt{5}) = 1$.

On a aussi $\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^1 - \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^1 = -2\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-9}{\sqrt{5}}$.

Donc $A_1 = p$ avec $p = 1$ et $B_1 = \frac{q}{\sqrt{5}}$ avec $q = -9$.

P_1 est vraie.

Soit $n > 0$ un entier naturel.

On fait l'hypothèse de récurrence P_n est vraie, c'est à dire qu'il existe des entiers relatifs p et q tels que $A_n = p$ et $B_n = \frac{q}{\sqrt{5}}$.

On a $A_{n+1} = \frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^{n+1} + \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^{n+1}$ d'où

$$A_{n+1} = \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n \right) (1 - \sqrt{5}) + \left(\frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n \right) (1 + \sqrt{5}).$$

A i n s i

$$A_{n+1} = \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n \right) - \sqrt{5} \times \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n \right) + \left(\frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n \right) + \sqrt{5} \times \left(\frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n \right).$$

Alors $A_{n+1} = A_n - \sqrt{5} B_n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $A_{n+1} = p - \sqrt{5} \times \frac{q}{\sqrt{5}} = p + q \in \mathbb{Z}$.

De même, on a $B_{n+1} = \frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^{n+1} - \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^{n+1}$ d'où

$$B_{n+1} = \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n \right) (1 - \sqrt{5}) - \left(\frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n \right) (1 + \sqrt{5}).$$

$$B_{n+1} = \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n \right) - \sqrt{5} \times \left(\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n \right) - \left(\frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n \right) - \sqrt{5} \times \left(\frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n \right).$$

Alors $B_{n+1} = B_n - \sqrt{5} A_n$.

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $B_{n+1} = \frac{q}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} p = \frac{q}{\sqrt{5}} - \frac{5p}{\sqrt{5}} = \frac{q - 5p}{\sqrt{5}}$ et $q - 5p \in \mathbb{Z}$.

La propriété P_{n+1} est vraie.

La propriété P_n est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, comme la propriété P_n est vraie au rang 1 et est héréditaire pour $n \geq 1$, alors elle est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Finalement $\frac{2\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} (1 - \sqrt{5})^n + \frac{2\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} (1 + \sqrt{5})^n$ est entier pour tout $n > 0$.

■ **Question B:**

Notons $e_n = (1 + \sqrt{3})^{2n+1}$ et $e'_n = (-1 + \sqrt{3})^{2n+1}$.

On définit les suites (α_n) et (β_n) par $\begin{cases} \alpha_{n+1} = 4\alpha_n + 6\beta_n \\ \beta_{n+1} = 2\alpha_n + 4\beta_n \end{cases}$ et $(\alpha_0; \beta_0) = (1; 1)$.

Pour tout entier n , les nombres α_n et β_n sont des entiers naturels (divisibles par 2^n).

On définit la propriété $P_n : e_n = \alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$ et $e'_n = -\alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$:

$$e_0 = (1 + \sqrt{3})^{2 \times 0 + 1} = 1 + \sqrt{3} \text{ et } e'_0 = (-1 + \sqrt{3})^{2 \times 0 + 1} = -1 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Or } \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{3} = 1 + 1 \times \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} \text{ et } -\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{3} = 1 - \sqrt{3}.$$

$$\text{Par suite } e_0 = \alpha_0 + \beta_0 \sqrt{3} \text{ et } e'_0 = -\alpha_0 + \beta_0 \sqrt{3}.$$

Ainsi P_0 est vraie.

Soit n un entier naturel.

On fait l'hypothèse de récurrence P_n est vraie, c'est à dire que $e_n = \alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$ et $e'_n = -\alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$.

On a alors:

$$e_{n+1} = (1 + \sqrt{3})^{2(n+1)+1} = (1 + \sqrt{3})^{2n+1} (1 + \sqrt{3})^2 = e_n \times (4 + 2\sqrt{3}).$$

Alors comme par hypothèse de récurrence, $e_n = \alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$, on obtient

$$e_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3}) = (4\alpha_n + 6\beta_n) + (2\alpha_n + 4\beta_n)\sqrt{3} \text{ d'où } e_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\sqrt{3}.$$

$$e'_{n+1} = (-1 + \sqrt{3})^{2(n+1)+1} = (-1 + \sqrt{3})^{2n+1} (-1 + \sqrt{3})^2 = e_n \times (4 - 2\sqrt{3}).$$

Alors comme par hypothèse de récurrence, $e'_n = -\alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$, on obtient

$$e'_{n+1} = (-\alpha_n + \beta_n \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3}) = -(4\alpha_n + 6\beta_n) + (2\alpha_n + 4\beta_n)\sqrt{3} \text{ d'où } e'_{n+1} = -\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\sqrt{3}.$$

La propriété P_{n+1} est vraie et la propriété P_n est donc héréditaire.

En conclusion, comme la propriété P_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire pour tout $n \geq 0$, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

Ainsi pour tout entier naturel n , $e_n = \alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$ et $e'_n = -\alpha_n + \beta_n \sqrt{3}$.

Soit alors n un entier.

$$\text{Remarquons que } e_n \times e'_n = (1 + \sqrt{3})^{2n+1} (-1 + \sqrt{3})^{2n+1} = ((1 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3}))^{2n+1} = 2^{2n+1}.$$

On en déduit donc que:

$$\bullet \frac{2^{2n+1}}{e_n} = (-1 + \sqrt{3})^{2n+1} \text{ et ainsi } 0 < \frac{2^{2n+1}}{e_n} < 1 \text{ puisque } 0 < -1 + \sqrt{3} < 1.$$

$$\bullet -\alpha_n + \beta_n \sqrt{3} = \frac{2^{2n+1}}{e_n} \text{ et ainsi } \beta_n \sqrt{3} = \alpha_n + \frac{2^{2n+1}}{e_n}.$$

On obtient alors $\alpha_n \leq \beta_n \sqrt{3} < \alpha_n + 1$ d'où $E(\beta_n \sqrt{3}) = \alpha_n$.

Remarquons enfin que pour tout nombre réel x et tout entier naturel p , $E(x + p) = p + E(x)$.

Par conséquent $E(e_n) = E(\alpha_n + \beta_n \sqrt{3}) = \alpha_n + E(\beta_n \sqrt{3}) = 2\alpha_n$: la partie entière de $(1 + \sqrt{3})^{2n+1}$ est donc paire.