Test 1, Cpge.

Correction

Exercice 1:

On décompose 2010 en produits de facteurs premiers.

On a: $2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$.

Alors le nombre de diviseurs strictement positifs de 2010 est donné par $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 2^4 = 16$.

Exercice 2:

On raisonne par l'absurde.

On suppose qu'il existe des entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $\sqrt[3]{5} = \dfrac{a}{b}$.

Ainsi les nombres a et b vérifient l'équation $5\,b^3 = a^3$.

Par suite $5 \mid a^3$ d'où $5 \mid a$.

En effet, soit $a = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de a.

Alors $a^3 = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i^{3\alpha_i}$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de a^3.

Comme 5 est premier, comme $5 \mid a^3$ et comme la décomposition en produit de facteurs premiers contient tous les diviseurs premiers, alors il existe $i \in \{1; \ldots; n\}$ tel que $5 = p_i$. Par suite $5 \mid a$.

On obtient donc $a = 5\,a'$ avec $a' \in \mathbb{N}$ et ainsi $5\,b^3 = 5^3\,a'^3$ d'où $b^3 = 5^2\,a'^3$.

Par suite $5 \mid b^3$ et donc $5 \mid b$.

Les nombres a et b sont premiers entre eux et admettent 5 comme diviseur commun: absurde.

Le nombre $\sqrt[3]{5}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3:

Soit x et y des réels tels que $0 < x \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Comme x et y sont des réels strictement positifs, et comme $\sin(x) > 0$ pour tout réel $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que $\dfrac{\sin(y)}{\sin(x)} \leq \dfrac{y}{x}$ revient à montrer que $\dfrac{\sin(y)}{y} \leq \dfrac{\sin(x)}{x}$ c'est à dire que $\dfrac{\sin(x)}{x} - \dfrac{\sin(y)}{y} \geq 0$ c'est à dire que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est décroissante sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f est dérivable sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

On définit alors sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction g par $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$. On obtient $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

La fonction g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$.

Comme $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $x\sin(x) \leq 0$ donc $g'(x) \leq 0$: la fonction g est décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Par suite $g(x) \leq g(0)$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \leq 0$ pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $x^2 > 0$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $f'(x) \leq 0$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$: la fonction f est décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

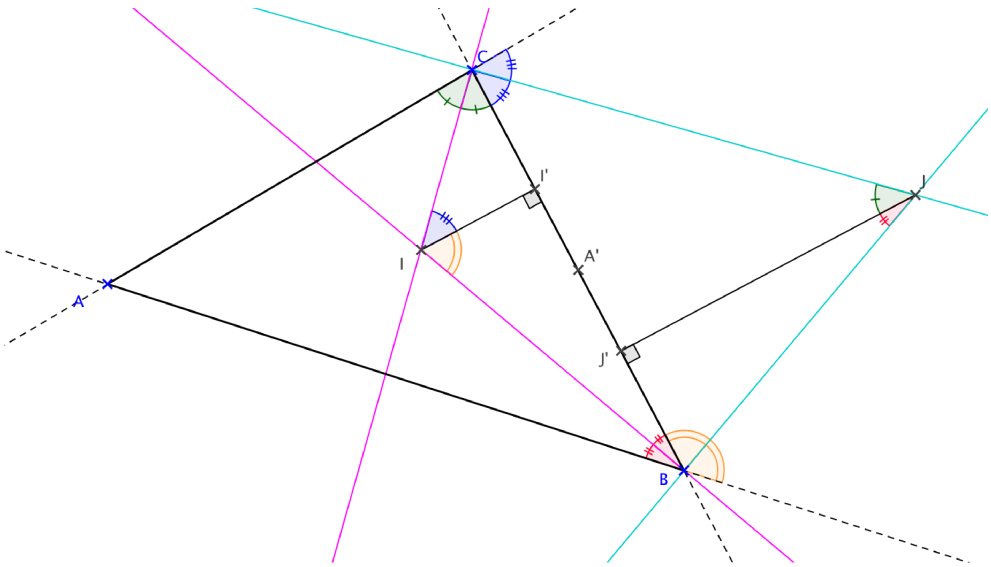
Ainsi pour tous réels x et y tels que $0 < x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin(y)}{y} \leq \frac{\sin(x)}{x}$ d'où $\frac{\sin(y)}{\sin(x)} \leq \frac{y}{x}$.

Exercice 4:

Soit ABC un triangle non aplati du plan. On note I le point d'intersection des bissectrices intérieures issues de B et C, et J le point d'intersection des bissectrices extérieures issues de B et C.

On note I', le projeté orthogonal de I sur (BC) et J' le projeté orthogonal de J sur (BC).
On note A' le milieu de $[BC]$.

On a la figure:



Comme (BI) et (BJ) sont les bissectrices de l'angle $\hat{B}$ intérieure et extérieure, on obtient donc $I\hat{B}J = \frac{\pi}{2}$ et que $I\hat{B}C$ et $C\hat{B}J$ sont complémentaires.

Par suite comme les triangles BJJ' et BII' sont rectangles respectivement en I et en J, alors $B\hat{I}I'$ et $I\hat{B}I'$ sont aussi complémentaires.

On en déduit $B\hat{I}I' = J\hat{B}J'\left(= \frac{1}{2}A\hat{B}C\right)$ et de même $B\hat{J}J' = I\hat{B}I'\left(= \frac{1}{2}(\pi - A\hat{B}C)\right)$.

Ainsi les triangles rectangles BJJ' et IBI' sont semblables (trois angles au sommets égaux).

On en déduit l'égalité des rapports $\frac{BI'}{JJ'} = \frac{II'}{BJ'} = \frac{BI}{BJ}$.

De même, on vérifie aisément que $C\hat{I}I' = J\hat{C}J'\left(= \frac{1}{2} A\hat{C}B\right)$ et de même $C\hat{J}J' = I\hat{C}I'\left(= \frac{1}{2}\left(\pi - A\hat{C}B\right)\right)$.

Ainsi les triangles rectangles C*JJ'* et *ICI'* sont semblables (trois angles au sommets égaux).

On en déduit l'égalité des rapports $\frac{JJ'}{CI'} = \frac{CJ'}{II'} = \frac{CJ}{CI}$.

Par suite on a l'égalité $\frac{BI'}{JJ'} \times \frac{JJ'}{CI'} = \frac{II'}{BJ'} \times \frac{CJ'}{II'}$ d'où $BI' \times BJ' = CI' \times CJ'$.

Comme d'autre part les points $I' \in [BC]$ et $J' \in [BC]$ (rappelons que le point d'intersection des bissectrices est le centre du cercle inscrit au triangle donc les points de tangence de ce cercle avec les côtés appartiennent à ces côtés), $BI' + CI' = BC$ et $BJ' + CJ' = BC$.

On obtient alors:

- $BI' \times BJ' = (BC - BI') \times CJ'$ d'où $BI'(BJ' + CJ') = BI' \times BC$ et donc $BI' = CJ'$
- $BI'(BC - CJ') = CI' \times CJ'$ d'où $BJ'(BI' + CI') = BC \times CI'$ d'où $BJ' = CI'$.

Ainsi comme ou $BA' = BI' + I'A'$ et $CA' = CJ' + J'A'$ ou $BA' = BJ' + J'A'$ et $CA' = CI' + I'A'$ et comme $BA' = CA'$, on obtient $I'A' = J'A'$ donc A' est le milieu de $[I'J']$.

Exercice 5:

Soit B une partie de X de cardinal p, avec $0 \leq p \leq n$.

Alors le nombre de parties A de X incluses dans B est le nombre de parties de B, c'est à dire 2^p.

Or le nombre de parties B de X de cardinal p, avec $0 \leq p \leq n$ est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Finalement le nombre de couples $(A\,;\ B)$ de parties de X telles que $A \subset B$ est $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p$.

Remarquons que $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p \times 1^{n-p} = (1+2)^n = 3^n$.

Ainsi le nombre de couples $(A\,;\ B)$ de parties de X telles que $A \subset B$ est 3^n.

Exercice 6:

a). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ et $f_n'(x) = n\,x^{n-1} + 1$.

Alors comme $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n\,x^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$.

Ainsi $f_n'(x) > 0$ pour $x \in [0; 1]$: la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$.

La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.

De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et 9 $f_n(1) = 1 > 0$.

On sait d'après le théorème de bijection que l'équation $f_n(x) = 0$ sur $[0; 1]$ admet donc une unique racine $x_n \in]0; 1[$.

b). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculons $f_{n+1}(x_n)$.

$f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{n+1} + x_n - 1$.

Or x_n est l'unique racine sur $[0; 1]$ de l'équation $f_n(x) = 0$ donc ${x_n}^n + x_n - 1 = 0$ d'où $x_n - 1 = -{x_n}^n$.

Par conséquent, $f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{n+1} - {x_n}^n = {x_n}^n(x_n - 1)$.

Or $x_n \in]0; 1[$ donc ${x_n}^n > 0$ et $x_n - 1 < 0$.

On en déduit $f_{n+1}(x_n) < 0$.

On sait d'après la question **a).**, que f_{n+1} est strictement croissante sur $[0; 1]$.
On sait aussi que $x_n \in]0; 1[$, $x_{n+1} \in]0; 1[$ et que $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
Partant, on peut affirmer que $x_n < x_{n+1}$.
En effet, si $x_n \geq x_{n+1}$, comme f_{n+1} est strictement croissante, on aurait alors $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$.
Or on sait que $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n < x_{n+1}$: la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est donc croissante.

Exercice 7:

Notons P l'événement "le test est positif" et C l'événement "la personne est contaminée".
On sait alors que $p(C) = 0,01$, $p_C(P) = 0,99$ et $p_{\overline{C}}(P) = 0,05$.
On en déduit
$p(P) = p(P \cap C) + p(P \cap \overline{C}) = p(C)\, p_C(P) + p(\overline{C})\, p_{\overline{C}}(P) = 0,01 \times 0,99 + (1 - 0,01) \times 0,05 = 0,0594$.
La probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit contaminée est $p_P(C)$.
On obtient $p_P(C) = \dfrac{p(P \cap C)}{p(P)} = \dfrac{0,01 \times 0,99}{0,0594} \approx 0,167$ donc la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit contaminée, à une décimale est 0,2.

Exercice 8:

Soit $x \in [0; +\infty[$.

$$\frac{x^3}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}} = 6 \times \left[\frac{6 + 6x + 3x^2 + x^3}{6 + 6x + 3x^2 + x^3} - \frac{6 + 6x + 3x^2}{6 + 6x + 3x^2 + x^3}\right] = 6 - \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ avec } u(x) = 6 + 6x + 3x^2 + x^3.$$

En effet on a bien $u'(x) = 0 + 6 \times 1 + 3 \times 2x + 3x^2 = 6 + 6x + 3x^2$.

Remarquons de plus que $u(x) > 0$ pour tout réel $x \in [0; +\infty[$.

Ainsi une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$ sur $[0; +\infty[$.

Finalement une primitive de $\dfrac{x^3}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}$ sur $[0; +\infty[$ est donc $6x - \ln(6 + 6x + 3x^2 + x^3)$.

Exercice 9:

On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et l'on déduit par récurrence la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ grâce à la relation de récurrence: $\forall\, n \geq 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Remarque:
On aura reconnu la suite de Fibonnacci.

a). On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
On définit pour n entier naturel, la propriété $F_n \in \mathbb{N}$.

On a $F_0 = 0$ et $0 \in \mathbb{N}$ donc $F_0 \in \mathbb{N}$. La propriété est vraie au rang 0.
On a $F_1 = 1$ et $1 \in \mathbb{N}$ donc $F_1 \in \mathbb{N}$. La propriété est vraie au rang 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On fait l'hypothèse de récurrence (dite parfois récurrence forte) que la propriété est vraie jusqu'au rang n, c'est à dire que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, $F_k \in \mathbb{N}$.
On sait que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$(comme $n > 0$, alors $n - 1 \geq 0$ et F_{n-1} est défini).
Par hypothèse de récurrence, on sait que $F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n-1} \in \mathbb{N}$.
De plus on sait que la somme de deux entiers naturels est un entier naturel.
Par suite $F_{n+1} \in \mathbb{N}$.
La propriété est vraie au rang $n + 1$. La propriété est donc héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0 et au rang 1. De plus elle est héréditaire pour tout entier naturel $n \geq 1$.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.
Comme elle est vraie aussi au rang 0, pour tout entier naturel n, $F_n \in \mathbb{N}$.

b). On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
On définit pour k entier naturle, la propriètè $F_{3\,k}$ est pair.

Pour $k = 0$, on a $F_{3\times 0} = F_0 = 0$ et 0 est pair.
Donc $F_{3\times 0}$ est un entier pair. La propriètè est vraie au rang $k = 0$.

Soit k un entier naturel.
On fait l'hypothèse de récurrence la propriété est vraie au rang k, c'est à dire que $F_{3\,k}$ est pair.
On a $F_{3\,(k+1)} = F_{3\,k+3} = F_{3\,k+2} + F_{3\,k+1} = F_{3\,k+1} + F_{3\,k} + F_{3\,k+1} = 2\,F_{3\,k+1} + F_{3\,k}$.
Comme par hypothèse de récurrence, $F_{3\,k}$ est pair et comme $2\,F_{3\,k+1}$ est clairement pair, on a donc $F_{3\,(k+1)}$ pair.
La propriété est vraie au rang $k + 1$. La propriété est héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire pour tout $k \geq 0$.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel k.
Ainsi pour tout entier naturel k, $F_{3\,k}$ est pair.

c). Montrer que, si $m \in \mathbb{N}^*$ et si m divise n, alors F_m divise F_n.
Soit m un entier naturel.
Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$ la propriété $P(k)$: $F_{m+k} = F_k\,F_{m+1} + F_{k-1}\,F_m$.

On a $F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$ donc $F_{m+2} = F_2\,F_{m+1} + F_1\,F_m$. La propriété $P(2)$ est vraie.
On a aussi $F_{m+3} = F_{m+2} + F_{m+1} = (F_{m+1} + F_m) + F_{m+1} = 2\,F_{m+1} + F_m$.
Alors comme $F_3 = 2$ et $F_2 = 1$, on a $F_{m+3} = F_3\,F_{m+1} + F_{3-1}\,F_m$.
La propriété $P(3)$ est vraie.

Soit $k \geq 3$.
On fait l'hypothèse de récurrence, la propriété $P(i)$ est vraie pour $3 \leq i \leq k$.
On a $F_{m+(k+1)} = F_{m+k} + F_{m+k-1}$.
Par hypothèse de récurrence, $F_{m+k} = F_k\,F_{m+1} + F_{k-1}\,F_m$ et $F_{m+k-1} = F_{k-1}\,F_{m+1} + F_{k-2}\,F_m$.
Alors $F_{m+(k+1)} = F_k\,F_{m+1} + F_{k-1}\,F_m + F_{k-1}\,F_{m+1} + F_{k-2}\,F_m$ d'où $F_{m+(k+1)} = (F_k + F_{k-1})\,F_{m+1} + (F_{k-1} + F_{k-2})\,F_m$ et donc $F_{m+k} = F_{k+1}\,F_{m+1} + F_k\,F_m$, c'est à dire $F_{m+(k+1)} = F_{k+1}\,F_{m+1} + F_{(k+1)-1}\,F_m$.
La propriété $P(k + 1)$ est vraie.
La propriété $P(k)$ est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, comme la propriété $P(k)$ est vraie pour $k = 2$, $k = 3$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $k \geq 2$.
Ainsi $F_{m+k} = F_k\,F_{m+1} + F_{k-1}\,F_m$ pour tout entier $k \geq 2$.

Soit un entier naturel $m \geq 2$.
Démontrons alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que F_m divise $F_{p\,m}$ pour tout entier $p \geq 1$.
On a clairement $F_m \mid F_{1\times m}$.
Soit p un entier naturel non nul.

On fait l'hypothèse de récurrence: F_m divise $F_{p\,m}$.
On a $F_{(p+1)\,m} = F_{p\,m+m}$.
Alors d'après le résultat précédent, on sait que $F_{(p+1)\,m} = F_m\,F_{p\,m+1} + F_{m-1}\,F_{p\,m}$.
Alors comme par hypothèse de récurrence, $F_m \mid F_{p\,m}$ alors $F_m \mid F_{m-1}\,F_{p\,m}$ et comme $F_m \mid F_m\,F_{p\,m+1}$, on en déduit que $F_m \mid F_{(p+1)\,m}$.
La propriété est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $p \geq 1$.

Remarque:
Elle est vraie pour $k = 1$: $F_{m+1} = F_1\,F_{m+1} + F_0\,F_m$.

Soit alors n et m des entiers avec $m \neq 0$ et $m \mid n$.
Si $n = 0$, alors comme 0 est divisible par tout entier et comme $F_0 = 0$, on a bien $F_m \mid F_n$.
Si $n = 1$, alors comme le seul diviseur positif de 1 est 1, $m = 1$ et donc $F_m = F_n$: $F_m \mid F_n$.
Soit alors $n \geq 2$.
Si $m = 1$, comme $F_1 = 1$ et que 1 divise tous les entiers, alors $F_m \mid F_n$.
On peut donc supposer $m \geq 2$.
Il existe un entier p tel que $n = p\,m$.
On a montré qu'alors $F_m \mid F_{p\,m}$ et donc $F_m \mid F_n$.

Exercice 10:

L'équation $x^3 - y^3 = 19$ revient à $(x - y)\,(x^2 + x\,y + y^2) = 19$.
Comme 19 est premier, alors on obtient que le couple$(x; y)$ est solution d'un des systèmes suivants:
$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + x\,y + y^2 = 19 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 19 \\ x^2 + x\,y + y^2 = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + x\,y + y^2 = -19 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = -19 \\ x^2 + x\,y + y^2 = -1 \end{cases}$.

Résolvons $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + x\,y + y^2 = 19 \end{cases}$.

$\begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y)^2 + (1 + y)\,y + y^2 = 19 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = 1 + y \\ -6 + y + y^2 = 0 \end{cases}$.

L'équation $-18 + 3\,y + 3\,y^2 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 225 > 0$.
Alors l'équation admet 2 racines $y_1 = \dfrac{-1 - 5}{2 \times 1} = -3 \in \mathbb{Z}$ et $y_2 = 2 \in \mathbb{Z}$.
Par suite le système admet 2 couples de solutions entières $(-2; -3)$ et $(3; 2)$.

Résolvons $\begin{cases} x - y = 19 \\ x^2 + x\,y + y^2 = 1 \end{cases}$. Il vient $\begin{cases} x = 19 + y \\ y^2 + 19\,y + 120 = 0 \end{cases}$.

L'équation du second degré $y^2 + 19\,y + 120 = 0$ admet un discriminant négatif. Elle n'admet pas de solution réelle.
Par suite ce système n'admet pas de solution entière.

Résolvons $\begin{cases} x - y = -1 \\ x^2 + x\,y + y^2 = -19 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = -1 + y \\ 3\,y^2 - 3\,y + 20 = 0 \end{cases}$.

L'équation $3\,y^2 - 3\,y + 20 = 0$ admet un discriminant négatif. Elle n'admet pas de solution réelle.
Par suite ce système n'admet pas de solution entière.

Résolvons $\begin{cases} x - y = -19 \\ x^2 + x\,y + y^2 = -1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x = -1 + y \\ 3\,y^2 - 57\,y + 362 = 0 \end{cases}$.

L'équation $3\,y^2 - 57\,y + 362 = 0$ admet un discriminant négatif. Elle n'admet pas de solution réelle.
Par suite ce système n'admet pas de solution entière.

En conclusion, les couples $(x; y)$ d'entiers relatifs tels que $x^3 - y^3 = 19$ sont $(-2; -3)$ et $(3; 2)$.

Exercice 11:

Soit r un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$.

On pose $f_n(t) = \frac{(r^2 - t^2)^n}{2^n\, n!}$ et $I_n = \int_0^r f_n(t) \cos(t)\, dt$.

Ainsi on a $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \frac{r^2 - t^2}{2}$.

a). On a $I_0 = \int_0^r f_0(t) \cos(t)\, dt$ et $f_0(t) = \frac{(r^2 - t^2)^0}{2^0 \times 0!} = 1$.

donc $I_0 = \int_0^r \cos(t)\, dt = [\sin(t)]_0^r = \sin(r)$.

On a $I_1 = \int_0^r f_1(t) \cos(t)\, dt$ et $f_1(t) = \frac{(r^2 - t^2)^1}{2^1 \times 1!} = \frac{r^2 - t^2}{2}$.

Ainsi $I_1 = \int_0^r \frac{r^2 - t^2}{2} \cos(t)\, dt = \frac{r^2}{2} \int_0^r \cos(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^r t^2 \cos(t)\, dt$.

Calculons $\int_0^r t^2 \cos(t)\, dt$ par intégration par parties.

$\int_0^r t^2 \cos(t)\, dt = \left[t^2 \sin(t)\right]_0^r - \int_0^r 2\, t \sin(t)\, dt = \left[t^2 \sin(t) - 2\, t\, (-\cos(t))\right]_0^r - \left(-\int_0^r 2\, (-\cos(t))\, dt\right)$ et finalement $\int_0^r t^2 \cos(t)\, dt = \left[t^2 \sin(t) + 2\, t \cos(t) - 2 \sin(t)\right]_0^r$.

On obtient donc $I_1 = \frac{r^2}{2} \sin(r) - \frac{1}{2}\left(r^2 \sin(r) + 2\, r \cos(r) - 2 \sin(r)\right)$ d'où $I_1 = -r \cos(r) + \sin(r)$.

b). Soit $n \geq 2$.

$f_n(t) = \frac{(r^2 - t^2)^n}{2^n\, n!}$ donc $f_n'(t) = \frac{1}{2^n\, n!} \times n \times (-2\, t) \left(r^2 - t^2\right)^{n-1} = -\frac{t (r^2 - t^2)^{n-1}}{2^{n-1}\, (n-1)!}$.

Ainsi $f_n''(t) = -\frac{1}{2^{n-1}\, (n-1)!}\left(1 \times \left(r^2 - t^2\right)^{n-1} + t \times (n-1)\, (-2\, t) \left(r^2 - t^2\right)^{n-2}\right)$ d'où $f_n''(t) = -\frac{(r^2 - t^2)^{n-1}}{2^{n-1}\, (n-1)!} + t^2 \frac{(r^2 - t^2)^{n-2}}{2^{n-2}\, (n-2)!}$.

On a donc obtenu $f_n''(t) = -f_{n-1}(t) + t^2 f_{n-2}(t)$.

Or $-(2\, n - 1) f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t) = -f_{n-1}(t) - 2\, (n-1) \frac{(r^2 - t^2)\, (r^2 - t^2)^{n-2}}{2^{n-1}\, (n-1)!} + r^2 f_{n-2}(t)$ d'où $-(2\, n - 1) f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t) = -f_{n-1}(t) - (r^2 - t^2) f_{n-2}(t) + r^2 f_{n-2}(t)$ c'est à dire $-(2\, n - 1) f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t) = -f_{n-1}(t) + t^2 f_{n-2}(t)$.

Finalement, pour $n \geq 2$, $f_n''(t) = -(2\, n - 1) f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t)$.

c). Par intégration par parties, $\int_0^r f_n(t) \cos(t)\, dt = [f_n(t) \sin(t)]_0^r - \int_0^r f_n'(t) \sin(t)\, dt$.

De nouveau par intégration par parties, $\int_0^r f_n(t) \cos(t)\, dt = [f_n(t) \sin(t) - f_n'(t)\, (-\cos(t))]_0^r - \left(-\int_0^r f_n''(t)\, (-\cos(t))\, dt\right)$ d'où $\int_0^r f_n(t) \cos(t)\, dt = [f_n(t) \sin(t) + f_n'(t) \cos(t)]_0^r - \int_0^r f_n''(t) \cos(t)\, dt$.

Or $[f_n(t) \sin(t) + f_n'(t) \cos(t)]_0^r = (f_n(r) \sin(r) + f_n'(r) \cos(r)) - (f_n(0) \sin(0) - f_n'(0) \cos(0))$.

Or $f_n(r) = \dfrac{(r^2 - r^2)^n}{2^n\, n!} = 0$, $f_n'(r) = -\dfrac{r(r^2 - r^2)^{n-1}}{2^{n-1}\,(n-1)!} = 0$, $f_n(0)\sin(0) = 0$ et $f_n'(0) = -\dfrac{0\times(r^2 - 0^2)^{n-1}}{2^{n-1}\,(n-1)!} = 0$.

Donc $[f_n(t)\sin(t) + f_n'(t)\cos(t)]_0^r = 0$.

Finalement $\displaystyle\int_0^r f_n(t)\cos(t)\,dt = -\int_0^r f_n''(t)\cos(t)\,dt$.

Comme d'après la question précédente, $f_n''(t) = -(2n-1)\,f_{n-1}(t) + r^2\,f_{n-2}(t)$, alors $\displaystyle\int_0^r f_n(t)\cos(t)\,dt = -\int_0^r (-(2n-1)\,f_{n-1}(t) + r^2\,f_{n-2}(t))\cos(t)\,dt$ d'où $\displaystyle\int_0^r f_n(t)\cos(t)\,dt = (2n-1)\int_0^r f_{n-1}(t)\cos(t)\,dt - r^2\int_0^r f_{n-2}(t)\cos(t)\,dt$.

Finalement $I_n = (2n-1)\,I_{n-1} - r^2\,I_{n-2}$.

d). On suppose par l'absurde, qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $I_n = 0$.

On sait que $I_N = 0$, $I_{N+1} = 0$ et $I_{N+1} = (2(N+1)-1)\,I_N - r^2\,I_{N-1}$ d'où $-r^2\,I_{N-1} = 0$.

Alors comme $I_N = (2N-1)\,I_{N-1} - r^2\,I_{N-2}$ alors $I_{N-2} = 0$.

De proche en proche, on obtient donc $I_{N-1} = I_{N-2} = \ldots = I_2 = 0$.

On obtient donc $I_3 = (2\times 3 - 1)\,I_2 - r^2\,I_1$ d'où $I_1 = 0$.

Enfin $I_2 = (2\times 2 - 1)\,I_1 - r^2\,I_0$ et donc $I_0 = 0$.

Or on a montré à la question **a).**, $I_0 = \sin(r)$.

Or $\sin(x) = 0$ si et seulement si $r = 0$ (modulo π) et $r \in]0; \dfrac{\pi}{2}[$.

Donc $I_0 \neq 0$. Contradiction.

e). Soit $A > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $A < N$.

Alors pour tout $n \geq N$, $\dfrac{A^n}{n!} = \dfrac{A}{1}\times\ldots\times\dfrac{A}{N-1}\times\dfrac{A}{N}\times\ldots\times\dfrac{A}{n}$.

On pose $\dfrac{A}{1}\times\ldots\times\dfrac{A}{N-1} = K \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\epsilon = \dfrac{A}{N} \in \left]0; 1\right[$.

Remarquons alors que pour tout entier $i \geq N$, $\dfrac{A}{i} \leq \dfrac{A}{N}$ d'où $\dfrac{A}{i} \leq \epsilon$.

Ainsi $0 \leq \dfrac{A^n}{n!} \leq K\times\epsilon^{n-N}$.

Comme $0 < \epsilon < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon^{n-N} = 0$ (suite géométrique de raison $0 < \epsilon < 1$) et donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A^n}{n!} = 0$.

Pour tout réel $t \in [0; r]$, $0 \leq r^2 - t^2 \leq r^2$ d'où $0 \leq \dfrac{(r^2 - t^2)^n}{2^n\, n!} \leq \dfrac{(r^2)^n}{2^n\, n!}$.

De plus comme $r \in]0; \frac{\pi}{2}[$, pour tout $t \in [0; r]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$.

Par suite pour tout $t \in [0; r]$, $0 \leq \dfrac{(r^2 - t^2)^n}{2^n\, n!}\cos(t) \leq \dfrac{(r^2)^n}{2^n\, n!}$.

Ainsi $0 \leq I_n \leq \dfrac{(r^2)^n}{2^n\, n!}\displaystyle\int_0^r 1\,dt$ d'où comme $0 < r < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \displaystyle\int_0^r 1\,d\mathrm{dt} = r \leq \dfrac{\pi}{2}$ et donc $0 \leq I_n \leq \dfrac{(r^2)^n}{2^n\, n!}\,\dfrac{\pi}{2}$.

Finalement $0 \leq b^n\,I_n \leq \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{\left(\frac{b\,r^2}{2}\right)^n}{n!}$.

Or $A = \dfrac{b\,r^2}{2} > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{b\,r^2}{2}\right)^n}{n!} = 0$ et d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n\,I_n = 0$.

f). On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

On définit pour n entier naturel la propriété
$P(n)$: il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos(r) + v_n \sin(r)$.

On a $I_0 = 0\times\cos(r) + 1\times\sin(r)$ donc $b^0 I_0 = 1\times I_0 = u_0 \cos(r) + v_0 \sin(r)$ avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
La propriété est vraie au rang 0.

Soit n un entier.
On fait l'hypothèse de récurrence $P(k)$ est vraie jusqu'au rang n, c'est à dire que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos(r) + v_n \sin(r)$.
On a montré que $I_{n+1} = (2(n+1) - 1) I_n - r^2 I_{n-1}$.
Alors $b^{n+1} I_{n+1} = b(2n+1)(b^n I_n) - b^2 \times \dfrac{a^2}{b^2}\left(b^{n-1} I_{n-1}\right) = b(2n+1)(b^n I_n) - a^2\left(b^{n-1} I_{n-1}\right)$.
Alors comme par hypothèse de récurrence, il existe des entiers relatifs u_n, v_n, u_{n-1} et v_{n-1} tels que $b^n I_n = u_n \cos(r) + v_n \sin(r)$ et $b^{n-1} I_{n-1} = u_{n-1}\cos(r) + v_{n-1}\sin(r)$, on en déduit:
$b^{n+1} I_{n+1} = (2n+1)\, b\,(u_n \cos(r) + v_n \sin(r)) - a^2(u_{n-1}\cos(r) + v_{n-1}\sin(r))$
$b^{n+1} I_{n+1} = ((2n+1)\, b\, u_n - a^2 u_{n-1})\cos(r) + ((2n+1)\, b\, v_n - a^2 v_{n-1})\sin(r)$.
On pose $u_{n+1} = (2n+1)\, b\, u_n - a^2 u_{n-1}$ et $v_{n+1} = (2n+1)\, b\, v_n - a^2 v_{n-1}$.
Alors comme a, b, u_n, u_{n-1}, v_n, v_{n-1} et $2n+1$ sont des entiers relatifs, u_{n+1} et v_{n+1} sont des entiers relatifs et ils sont tels que $b^{n+1} I_{n+1} = u_{n+1}\cos(r) + v_{n+1}\sin(r)$.
La propriété $P(n+1)$ est vraie.
La propriété $P(n)$ est héréditaire.

La propriété $P(n)$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire pour tout $n \geq 0$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.
Par conséquent, pour tout entier naturel n, il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos(r) + v_n \sin(r)$.

g). On suppose par l'absurde que $\tan(r)$ est rationnel et qu'il s'écrit donc $\dfrac{p}{q}$, avec p et q entiers.

Soit n un entier naturel.
On sait qu'il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos(r) + v_n \sin(r)$.
Alors comme $\cos(r) \neq 0$ puisque $r \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $b^n \dfrac{I_n}{\cos(r)} = u_n + v_n \tan(r) = u_n + v_n \dfrac{p}{q}$ d'où $b^n q \dfrac{I_n}{\cos(r)} = u_n + p\, v_n \in \mathbb{Z}$ puisque $(u_n;\ v_n;\ p) \in \mathbb{Z}^3$.

D'autre part, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n q \dfrac{I_n}{\cos(r)} = 0$.
Ainsi comme $\dfrac{1}{2} > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$, $\left| b^n q \dfrac{I_n}{\cos(r)} \right| < \dfrac{1}{2}$.

Or le seul entier relatif k tel que $|k| < \dfrac{1}{2}$ est $k = 0$: on en déduit qu'il existe un entier naturel N, tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $b^n q \dfrac{I_n}{\cos(r)} = 0$ c'est à dire tel que $I_n = 0$ pour tout entier naturel $n \geq N$ puisque $b^n q \times \dfrac{1}{\cos(r)} \neq 0$:contradiction (question **d).**).

Par conséquent $\tan(r)$ n'est pas rationnel.

h). On suppose par l'absurde que π est rationnel. Alors il existe des entiers naturels p et q tels que $\pi = \dfrac{p}{q}$ avec $q \neq 0$.

Partant $r = \frac{\pi}{4} = \frac{p}{4\,q}$ est rationnel et $r \in]\,0; \frac{\pi}{2}[$.

Alors d'après la question précédente, on peut affirmer que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ n'est pas rationnel.

Pourtant $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \in \mathbb{Q}$: contradiction.

Le nombre π est donc irrationnel.