Test 1, Cpge.

Composition de Mathématiques (Classe Terminale S)

Durée du test: 4 heures.

L'usage des calculatrices n'est pas auorisé.

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

Exercice 1:

Donner le nombre de diviseurs strictement positifs de 2010.

Exercice 2:

Montrer que $\sqrt[3]{5}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 3:

Soit x et y des réels tels que $0 < x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Montrer que $\frac{\sin(y)}{\sin(x)} \leq \frac{y}{x}$.

Exercice 4:

Soit ABC un triangle non aplati du plan. On note I le point d'intersection des bissectrices intérieures issues de B et C, et J le point d'intersection des bissectrices extérieures issues de B et C.

On note I', le projeté orthogonal de I sur (BC) et J' le projeté orthogonal de J sur (BC).

Montrer que le milieu de $[I'J']$ est égal au milieu de $[BC]$.

Exercice 5:

Soit X un ensemble à n éléments.
Donner le nombre de couples $(A\,;\,B)$ de parties de X telles que $A \subset B$.

Exercice 6:

On pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

a). Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $]0; 1[$. On note x_n cette racine.

b). Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Exercice 7:

Un groupe de personnes est soumis à un test virologique.
On suppose que la probabilité pour que le test soit positif dans le cas d'une contamination par le virus est de 99%.
On suppose que la probabilité de fausse alerte, c'est à dire que le test soit positif en l'abscence de contamination, est de 5%.
La fréquence d'infection du groupe est de 0,01%.

Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit contaminée ?
On donnera le résultat numérique avec une seule décimale.

Exercice 8:

Donner une primitive de $\dfrac{x^3}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}}$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 9:

On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et l'on déduit par récurrence la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ grâce à la relation de récurrence: $\forall\, n \geq 0,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

a). Montrer soigeusement que, pour tout $n \geq 0$, F_n est un entier.

b). Montrer que, pour tout $k \geq 0$, F_{3k} est un entier pair.

c). Montrer que, si $m \in \mathbb{N}^*$ et si m divise n, alors F_m divise F_n.

Exercice 10:

Déterminer tous les entiers relatifs x et y tels que $x^3 - y^3 = 19$.

Exercice 11:

Soit r un réel de $]0; \frac{\pi}{2}[$.

On pose $f_n(t) = \frac{(r^2 - t^2)^n}{2^n\, n!}$ et $I_n = \int_0^r f_n(t) \cos(t)\, dt$.

Ainsi on a $f_0(t) = 1$, $f_1(t) = \frac{r^2 - t^2}{2}$.

a). Calculer I_0 et I_1.

b). Montrer que, pour $n \geq 2$, $f_n''(t) = -(2n-1) f_{n-1}(t) + r^2 f_{n-2}(t)$.

c). En déduire que $I_n = (2n-1) I_{n-1} - r^2 I_{n-2}$.

d). Dans cette question, on suppose par l'absurde, qu'il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $I_n = 0$.
Aboutir à une contradiction à l'aide des questions **a).** et **c).**.

On suppose dans la suite de cette exercice que r est un rationnel que l'on écrit $r = \frac{a}{b}$ avec a et b des entiers naturels.

e). Montrer que, si $A > 0$, alors $\frac{A^n}{n!} \to 0$. En déduire que $b^n I_n \to 0$.

f). Montrer qu'il existe des entiers relatifs u_n et v_n tels que $b^n I_n = u_n \cos(r) + v_n \sin(r)$.

g). On suppose par l'absurde que $\tan(r)$ est rationnel et qu'il s'écrit donc $\frac{p}{q}$, avec p et q entiers.

Vérifier que $b^n q \frac{I_n}{\cos(r)} \in \mathbb{Z}$.
En déduire une contradiction.

h). Montrer que π est irrationnel.