

Test 5, Cpge

Correction

Exercice 1:

Soit ABC un triangle du plan euclidien tel que $AB = 4$, $BC = 5$ et $CA = 7$.

On donnera l'ensemble des résultats sous forme d'un tableau contenant les valeurs exactes (et non approchées) demandées.

a). Calculons $\cos(\hat{A})$.

On utilise la formule d'Al-Kashi.

$$\text{On a } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\hat{A}) \text{ d'où } \cos(\hat{A}) = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 4 \times 7} = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Calculons } \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).$$

$$\text{On sait que } \sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \text{ ainsi } \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\sin(\hat{A})}{2 \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}.$$

$$\text{On a } \sin(\hat{A}) = \sqrt{1 - \cos^2(\hat{A})} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \text{ (un angle au sommet d'un triangle est compris entre}$$

$$0 \text{ et } \pi \text{ radians donc son sinus est positif) et } \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - 1 \text{ d'où } \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos(\hat{A}) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{7} + 1}{2}}.$$

$$\text{Finalement } \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\sqrt{\frac{6}{7}}} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Calculons $\sin(\hat{B})$.

$$\text{On a } \cos(\hat{B}) = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 5} = -\frac{1}{5}.$$

$$\text{Alors } \sin(\hat{B}) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

b). Notons A' le milieu de $[BC]$. Alors $AG = \frac{2}{3} AA'$.

Comme $AA'^2 = AB^2 + BA'^2 - 2AB \times BA' \cos(\hat{B})$, on obtient

$$AA' = \sqrt{4^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times 4 \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\sqrt{105}}{2}.$$

$$\text{Ainsi } AG = \frac{\sqrt{105}}{3}.$$

c). Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

Le triangle AHC est rectangle en H .

$$\text{Ainsi } \sin(\hat{C}) = \frac{AH}{AC}.$$

$$\text{Or dans le triangle } ABC, \cos(\hat{C}) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AB \times BC} = \frac{29}{35} \text{ d'où } \sin(\hat{C}) = \sqrt{1 - \left(\frac{29}{35}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{35}.$$

$$\text{On obtient donc } AH = 7 \times \frac{8\sqrt{6}}{35} = \frac{8\sqrt{6}}{5}.$$

d). Soit I l'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $(AB, \hat{A}C)$ avec la droite (BC) .

On raisonne dans le triangle AIH rectangle en H .

$$\text{On sait que } \frac{AH}{AI} = \cos(\hat{HAI}).$$

$$\text{On a } \hat{HAI} = \hat{HAB} + \hat{BAI} = \left(\hat{B} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\hat{A}}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \cos(\hat{HAI}) = \cos\left(\hat{B} - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - \sin\left(\hat{B} - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \quad \text{d'où}$$

$$\cos(\hat{HAI}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \hat{B}\right) \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \text{ et ainsi } \cos(\hat{HAI}) = \sin(\hat{B}) \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + \cos(\hat{B}) \sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).$$

$$\text{Alors } AI = \frac{\frac{8\sqrt{6}}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5} \times \sqrt{\frac{6}{7}} + \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{\sqrt{7}}{7}} = \frac{8\sqrt{6}}{5} \times \frac{5\sqrt{7}}{11} = \frac{8\sqrt{6}\sqrt{7}}{11}.$$

En résumé:

Question	Grandeur	Résultat
a).	$\cos(\hat{A})$	$\frac{5}{7}$
	$\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{7}}$
	$\sin(\hat{B})$	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$
b).	AG	$\frac{\sqrt{105}}{3}$
c).	AH	$\frac{8\sqrt{6}}{5}$
d).	AI	$\frac{8\sqrt{6}\sqrt{7}}{11}$

Exercice 2:

a). On pose $x = 1 + b$. Alors $\lim_{b \rightarrow 0} x = 1$.

$$\text{On obtient } f(1+b) = \frac{(1+b)^2 - 1}{\ln(1+b)} = \frac{b \times (2+b)}{\ln(1+b)} = \frac{1}{\frac{\ln(1+b)}{b}} \times (2+b).$$

Or on sait que $\frac{\ln(1+b)}{b} \xrightarrow{b \rightarrow 0} 1 \neq 0$ donc $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+b)}{b}} = 1$.

De plus $\lim_{b \rightarrow 0} (2+b) = 2$.

Finalement $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+b)}{b}} \times (2+b) = 2$ d'où $\lim_{b \rightarrow 0} f(1+b) = 2$ et ainsi par composition, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

b). On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1 \in \mathbb{R}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{\ln(x)} = 0$.

c). Pour tout réel $x > 1$, $\frac{x^2 - 1}{\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)}$.

Or on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0^+$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$.

Par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

d). La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et on a $f'(x) = \frac{2x \times \ln(x) - (x^2 - 1) \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{x^2(2 \ln(x) - 1) + 1}{x(\ln(x))^2}$.

On pose $g(x) = x^2(2 \ln(x) - 1) + 1$.

La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a $g'(x) = 2x(2 \ln(x) - 1) + x^2 \times \frac{2}{x} = 4x \ln(x)$.

Comme $x > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par suite, $g'(x) < 0$ pour $x \in]0; 1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x \in]1; +\infty[$.

La fonction g est donc décroissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

La fonction g admet donc $g(1)$ comme minimum sur $]0; +\infty[$.

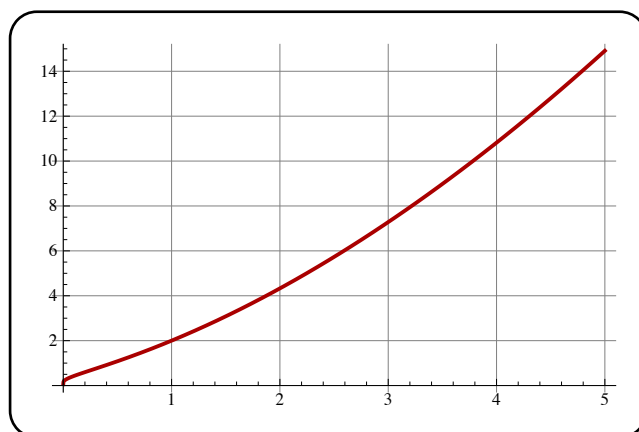
Or $g(1) = 0$ donc $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.

Ainsi comme pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln(x))^2}$ et comme $x(\ln(x))^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $f'(x)$ est

du signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$.

On en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ et donc que f est croissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

e). On obtient:



Exercice 3:

Calculons la probabilité que le conducteur choisi ait un accident pendant l'année.

On note $\mathcal{Q}$ l'événement "le conducteur a moins de 40 ans" et $\mathcal{A}$, l'événement "le conducteur a un accident".

Alors la probabilité que le conducteur choisi ait un accident dans l'année est $p(\mathcal{A}) = p(\mathcal{Q} \cap \mathcal{A}) + p(\overline{\mathcal{Q}} \cap \mathcal{A})$.

On sait que $p(\mathcal{Q}) = p(\overline{\mathcal{Q}}) = \frac{1}{2}$ et que $p_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = a$ et $p_{\overline{\mathcal{Q}}}(\mathcal{A}) = b$.

Ainsi $p(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(a + b)$.

Comme aucune information n'est donnée sur l'influence que le conducteur ait eu ou non un accident pendant une année, on peut supposer que l'expérience aléatoire qui consiste à dénombrer le nombre d'accident d'un conducteur choisi au hasard sur deux années est la répétition de deux épreuves aléatoires indépendantes à 2 issues: avoir ou ne pas avoir eu d'accident une année donnée.

Ainsi, on en déduit que la probabilité que le conducteur choisi ait un accident lors de chacune des deux premières

années est donnée par $\left(\frac{1}{2}(a + b)\right)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2$.

Exercice 4:

On raisonne par récurrence sur $\mathbb{N}$.

On définit pour n entier naturel, la propriété $P(n)$: $2^n + (-1)^{n+1}$ est divisible par 3.

Pour $n = 0$, on a $2^0 + (-1)^{0+1} = 1 - 1 = 0$ et 3 divise 0 donc $2^0 + (-1)^{0+1}$ est divisible par 3.

Soit n un entier.

On fait l'hypothèse de récurrence, $P(n)$ est vraie, c'est à dire que $2^n + (-1)^{n+1}$ est divisible par 3.

On a $2^{n+1} + (-1)^{(n+1)+1} =$

$$2^n \times 2 + (-1)^{n+1} \times (-1) = 2^n \times 2 + (-1)^{n+1} \times 2 + (-1)^{n+1} \times (-3) = 2 \times (2^n + (-1)^{n+1}) - 3 \times (-1)^{n+1}$$

Alors comme par hypothèse de récurrence, $2^n + (-1)^{n+1}$ est divisible par 3 et comme $3 \times (-1)^{n+1}$ est divisible par 3, le nombre $2 \times (2^n + (-1)^{n+1}) - 3 \times (-1)^{n+1}$ est divisible par 3.

Finalement $2^{n+1} + (-1)^{(n+1)+1}$ est divisible par 3: la propriété $P(n + 1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ est héréditaire.

La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire pour $n \geq 0$.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier n .

Ainsi $2^n + (-1)^{n+1}$ est divisible par 3 pour tout entier naturel n .

Exercice 5:

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des réels x tels qu'existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ pour lequel $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$.

a). Soit x et y des réels de $\mathcal{A}$.

On sait qu'il existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ et $(a'; b'; c'; d') \in \mathbb{Q}^4$ tels que $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ et $y = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6}$.

Alors:

$$xy = (a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6})(a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3} + d'\sqrt{6})$$

$$\begin{aligned} xy = & aa' + ab'\sqrt{2} + ac'\sqrt{3} + ad'\sqrt{6} + \\ & ba'\sqrt{2} + bb'\sqrt{2} + bc'\sqrt{3} + bd'\sqrt{6} + \\ & ca'\sqrt{3} + cb'\sqrt{3} + cc'\sqrt{3} + cd'\sqrt{6} + \\ & da'\sqrt{6} + db'\sqrt{6} + dc'\sqrt{3} + dd'\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy = & aa' + 2bb' + 3cc' + 6dd' + \text{puisque } \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}, (\sqrt{a})^2 = a, \sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3} \text{ et} \\ & \sqrt{2}(ab' + ba' + 3cd' + 3dc') + \\ & \sqrt{3}(ac' + 2bd' + ca' + 2db') + \\ & \sqrt{6}(ad' + bc' + cb' + da') \end{aligned}$$

$$\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 9} = 3\sqrt{2}.$$

Finalement en posant $A = aa' + 2bb' + 3cc' + 6dd'$, $B = ab' + ba' + 3cd' + 3dc'$,

$C = ac' + 2bd' + ca' + 2db'$ et $D = ad' + bc' + cb' + da'$, on obtient que $xy = A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}$ avec $(A; B; C; D) \in \mathbb{Q}^4$.

En effet les nombres A, B, C et D sont des sommes de produits de rationnels donc des nombres rationnels.

Finalement $xy \in \mathcal{A}$.

b). On suppose que l'un au moins des quatre rationnels a, b, c, d n'est pas nul.

On raisonne par l'absurde.

On suppose donc que l'un au moins des quatre rationnels a, b, c, d n'est pas nul et que

$$x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0.$$

Soit un seul des nombres a, b, c ou d est non nul.

- si $a \neq 0$ et $b = c = d = 0$ alors $x = a \neq 0$: absurde.
- si $b \neq 0$ et $a = c = d = 0$, alors $x = b\sqrt{2} \neq 0$: absurde

De même avec c et d .

Donc il ne peut y avoir un seul des nombres a, b, c ou d non nul et $x = 0$.

Soit deux seulement des nombres a, b, c ou d sont non nuls.

- si $a \neq 0, b \neq 0$ et $c = d = 0$ alors $x = a + b\sqrt{2}$ d'où comme $x = 0$, $\sqrt{2} = \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$: absurde.
- si $a \neq 0, c \neq 0$ et $b = d = 0$, alors $x = a + c\sqrt{3}$ d'où $\sqrt{3} = \frac{-a}{c} \in \mathbb{Q}$: absurde.
- ...
- si $b \neq 0, c \neq 0$ et $a = d = 0$, alors $x = b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ d'où $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{-b}{c}$ c'est à dire $\sqrt{6} = \frac{-2b}{c} \in \mathbb{Q}$: absurde.
- ...
- si $c \neq 0, d \neq 0$ et $a = b = 0$, $x = c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ d'où $\sqrt{2} = \frac{-c}{d} \in \mathbb{Q}$: absurde.

Dans tous les cas, deux exactement des nombres a, b, c ou d ne peuvent être non nuls et $x = 0$.

Soit au moins trois des nombres a, b, c ou d sont non nuls.

$$\text{Alors } x = 0 \text{ entraîne } a + b\sqrt{2} = -\sqrt{3}(c + d\sqrt{2}).$$

Comme $c \neq 0$ ou $d \neq 0$, $c + d\sqrt{2} \neq 0$. En effet sinon $d\sqrt{2} = -c$ donc si $d = 0$, alors $c = 0$, impossible, si $d \neq 0$, $\sqrt{2} = \frac{-c}{d} \in \mathbb{Q}$, absurde.

Par suite $\sqrt{3} = \frac{a + b\sqrt{2}}{-(c + d\sqrt{2})} = -\frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \sqrt{2} \frac{(cb - ad)}{c^2 - 2d^2} = A + B\sqrt{2}$ avec $(A; B) \in \mathbb{Q}$.

Remarquons que comme $\sqrt{3} \neq 0$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, alors $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

On a donc $3 = (A + B\sqrt{2})^2$ d'où $3 - A^2 - 2B^2 = 2AB\sqrt{2}$ et ainsi $\sqrt{2} = \frac{3 - A^2 - 2B^2}{2AB} \in \mathbb{Q}$: absurde.

Dans tous les cas, l'hypothèse "l'un au moins des quatre rationnels a, b, c, d n'est pas nul et que $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ " amène une contradiction.

Par suite si l'un au moins des quatre rationnels a, b, c, d n'est pas nul alors $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \neq 0$.

c). Soit x un élément non nul de $\mathcal{A}$.

D'après la question précédente, au moins un des nombres a, b, c ou d est non nul et donc le nombre $x' = (a - b\sqrt{2} - \sqrt{3}c + d\sqrt{6}) = (a - b\sqrt{2}) - \sqrt{3}(c - d\sqrt{2})$ est aussi non nul.

On a $\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}} = \frac{(a - b\sqrt{2}) - \sqrt{3}(c - d\sqrt{2})}{((a + b\sqrt{2}) + \sqrt{3}(c + d\sqrt{2}))(a - b\sqrt{2}) - \sqrt{3}(c - d\sqrt{2})}$ d'où

$$\frac{1}{x} = \frac{(a - b\sqrt{2}) - \sqrt{3}(c - d\sqrt{2})}{(a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) + 2\sqrt{6}(-bc + ad)}.$$

Comme $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors $xx' \neq 0$ donc $(a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) + 2\sqrt{6}(-bc + ad) \neq 0$.

Remarquons de plus que $(a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) + 2\sqrt{6}(-bc + ad) = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} + \delta\sqrt{6}$ avec $\beta = \gamma = 0$ et $(\alpha; \beta; \gamma; \delta) \in \mathbb{Q}^4$ donc $(a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) + 2\sqrt{6}(-bc + ad) \in \mathcal{A}$.

Donc $\alpha = (a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2)$ ou $\delta = (-bc + ad)$ est non nul.

D'après la question b)., on sait donc que $(a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) - 2\sqrt{6}(-bc + ad) \neq 0$.

Alors $\frac{1}{x} = \frac{\left(\left((a - b\sqrt{2}) - \sqrt{3}(c - d\sqrt{2})\right)\left((a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) - 2\sqrt{6}(-bc + ad)\right)\right)}{\left(\left((a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) + 2\sqrt{6}(-bc + ad)\right)\left((a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) - 2\sqrt{6}(-bc + ad)\right)\right)}$.

Remarquons alors que le numérateur est le produit de deux nombres de $\mathcal{A}$ donc un nombre de $\mathcal{A}$ d'après la question a)..

De plus $\left((a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) + 2\sqrt{6}(-bc + ad)\right)\left((a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2) - 2\sqrt{6}(-bc + ad)\right) = (a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 6d^2)^2 - 24(-bc + ad)^2 \in \mathbb{Q}$

Ainsi $\frac{1}{x} = \frac{A + B\sqrt{2} + C\sqrt{3} + D\sqrt{6}}{E} = A' + B'\sqrt{2} + C'\sqrt{3} + D'\sqrt{6}$ avec $(A'; B'; C'; D') \in \mathbb{Q}^4$.

Le nombre $\frac{1}{x}$ est donc dans $\mathcal{A}$.

Exercice 6:

Soit a et b deux entiers naturels strictement positifs.

On pose $\delta = \text{pgcd}(a; b)$ et $\mu = \text{ppcm}(a; b)$.

Raisonnons par disjonction des cas.

On peut supposer $a \leq b$.

Cas 1: $a \mid b$ (en particulier si $a = b$)

Alors $\delta = \text{pgcd}(a; b) = a$ et $\text{ppcm}(a; b) = b$ d'où $a + b = \delta + \mu$.

Cas 2: $a \wedge b = 1$.

On peut supposer $a < b$.

Alors $\delta = \text{pgcd}(a; b) = 1$ et $\mu = \text{ppcm}(a; b) = ab$.

Remarquons que $2 \leq a < b$.

Par suite $a \leq \frac{ab}{2}$ et $b \leq \frac{ab}{2}$ d'où $a + b \leq ab < ab + 1$.

Ainsi $a + b < \delta + \mu$.

Cas 3: $a < b$ et a et b ne sont pas premiers entre eux et a ne divise pas b .

Il existe des entiers a' et b' strictement supérieurs à 1, premiers entre eux tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.

De plus $\mu = \text{ppcm}(a; b) = \delta \text{ppcm}(a'; b') = \delta a' b'$.

On a montré que $a' + b' < 1 + a' b'$ d'où comme $\delta \geq 2 > 0$, $\delta(a' + b') < \delta(1 + a' b')$ et ainsi $a + b < \delta + \mu$.

Finalement $a + b \leq \delta + \mu$ et $a + b = \delta + \mu$ si et seulement si $a \mid b$ ou $b \mid a$.

Exercice 7:

Soit $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les trois angles d'un triangle ABC du plan euclidien.

On peut supposer, quitte à réordonner les noms des sommets: $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$.

On sait alors que $\hat{C} \geq \frac{\pi}{3}$ et $0 \leq \hat{A} \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \hat{B} \leq \frac{\pi}{2}$.

En effet, comme $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, alors on ne peut pas avoir $\hat{A} < \frac{\pi}{3}$, $\hat{B} < \frac{\pi}{3}$ et $\hat{C} < \frac{\pi}{3}$.

De plus si $\hat{C} \geq \frac{\pi}{2}$, alors $\hat{A} + \hat{B} \leq \frac{\pi}{2}$ d'où $\hat{A} \leq \frac{\pi}{2}$ et $\hat{B} \leq \frac{\pi}{2}$.

On a alors $\sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{C}) = \sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\pi - (\hat{A} + \hat{B})) = \sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{A} + \hat{B})$.

Soit alors $\hat{B} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On définit la fonction f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(x) + \sin(\hat{B}) + \sin(x + \hat{B})$.

On a $f'(x) = \cos(x) + \cos(x + \hat{B}) = 2 \cos\left(x + \frac{\hat{B}}{2}\right) \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right)$.

Comme $\frac{\hat{B}}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, alors $\cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $\cos\left(x + \frac{\hat{B}}{2}\right)$.

Alors comme $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \frac{\hat{B}}{2} \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq x + \frac{\hat{B}}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$.

Donc $f'(x) \geq 0$ si $0 \leq x + \frac{\hat{B}}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et $f'(x) \leq 0$ si $\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\hat{B}}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$.

Ainsi $f'(x) \geq 0$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}\right]$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Dans tous les cas la fonction f présente un maximum pour $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}$.

Ce maximum est égal à $f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}\right) + \sin(\hat{B}) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\hat{B}}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \sin(\hat{B})$.

On définit la fonction g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par $g(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(x)$.

On a $g'(x) = -2 \times \frac{1}{2} \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) = \cos(x) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.

Le trinôme du second degré $-2X^2 - X + 1$ admet 2 racines $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$.

On sait donc comme $-2 < 0$, que $-2X^2 - X + 1 \geq 0$ pour $X \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$ et $-2X^2 - X + 1 < 0$ sinon.

Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et ainsi $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ si $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Par suite $g'(x) \geq 0$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et $g'(x) \leq 0$ si $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction g admet donc un maximum pour $x = \frac{\pi}{3}$ égal à $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Finalement, quels que soient les angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$, avec $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$,

$$\sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{C}) \leq 2 \cos\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) + \sin(\hat{B}) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 8:

$$\text{On a } \binom{571}{45} = \frac{571!}{45!(571-45)!}.$$

Considérons un entier naturel n . Le nombre de 0 qui termine l'écriture décimale de $n!$ est donné par le nombre de couples $(2; 5)$ que l'on peut former avec tous les facteurs de $n!$. En effet si $n!$ se termine par p zéros alors il est divisible par $10^p = (2 \times 5)^p$.

Il s'agit donc de dénombrer les 2 et les 5 rentrant dans les décompositions de $571!$, $45!$ et $(571-45)! = 526!$.

Il est clair que déterminer le nombre de 5 suffit, puisque qu'il y a "plus" de multiples de 2 dans $\{1; 2; \dots; n\}$ que de multiples de 5.

On a $45! = 1 \times 2 \times \dots \times 45$: il y a 1 seul multiple de 25 dans $\{1; 2; \dots; 45\}$ et 9 multiples de 5 dont celui de 25.

Par suite $45! = 5^8 \times 5^2 \times k = 5^{10} \times k$, avec k entier naturel non divisible par 5.

Dans la liste $\{1; 2; \dots; 526\}$, comme $526 = 4 \times 125 + 26$, comme $526 = 21 \times 25 + 1$ et comme $526 = 105 \times 5 + 1$, il y a 4 multiples de 125, 21 multiples de 25 dont les 4 de 125, 105 multiples de 5 dont les 21 de 25.

Par suite $526! = (5^3)^4 \times (5^2)^{21-4} \times 5^{105-21} \times k' = 5^{130} \times k'$, avec k' entier naturel non divisible par 5.

Dans la liste $\{1; 2; \dots; 571\}$, comme $571 = 4 \times 125 + 71$, comme $571 = 22 \times 25 + 1$ et comme $571 = 114 \times 5 + 1$, il y a 4 multiples de 125, 22 multiples de 25 dont les 4 de 125, 114 multiples de 5 dont les 22 de 25.

Par suite $571! = (5^3)^4 \times (5^2)^{22-4} \times 5^{114-22} \times k'' = 5^{140} \times k''$, avec k'' entier naturel non divisible par 5.

$$\text{On en déduit } \binom{571}{45} = \frac{5^{140} \times k''}{5^{10} \times k \times 5^{130} \times k'} = \frac{k''}{k \times k'} \text{ avec 5 ne divise pas l'entier } \frac{k''}{k \times k'}.$$

Par suite 10 ne divise pas $\binom{571}{45}$ et donc le nombre $\binom{571}{45}$ ne se termine pas par zéro.

Exercice 9:

On pose $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$ et par récurrence, $P_{n+1}(x) = x P_n(x) - P_{n-1}(x)$.

a). On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$.

On définit la propriété $\mathcal{Q}(n)$: il existe des entiers relatifs $a_{n-1,n}; \dots; a_{0,n}$ tels que $P_n(x) = x^n + a_{n-1,n} x^{n-1} + \dots + a_{0,n}$.

Pour $n = 1$, on a $P_1(x) = x$ et $x = x^1 + 0$ avec $0 \in \mathbb{Z}$.

En posant $a_{0,1} = 0$, on a bien $P_1(x) = x^1 + a_{0,1}$ et $a_{0,1} \in \mathbb{Z}$.

La propriété $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Soit n un entier relatif.

On fait l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{Q}(k)$ est vraie pour tout $1 \leq k \leq n$, c'est à dire que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, il existe des entiers relatifs $a_{k-1,k}; \dots; a_{0,k}$ tels que $P_k(x) = x^k + a_{k-1,k} x^{k-1} + \dots + a_{0,k}$.

On sait que $P_{n+1}(x) = x P_n(x) - P_{n-1}(x)$.

Alors comme par hypothèse de récurrence, il existe des entiers relatifs $a_{n-1,n}; \dots; a_{0,n}$ tels que

$P_n(x) = x^n + a_{n-1,n} x^{n-1} + \dots + a_{0,n}$ et des entiers relatifs $a_{n-2,n-1}; \dots; a_{0,n-1}$ tels que

$P_{n-1}(x) = x^{n-1} + a_{n-2,n-1} x^{n-2} + \dots + a_{0,n-1}$, on

obtient:

$$P_{n+1}(x) = x(x^n + a_{n-1,n} x^{n-1} + \dots + a_{0,n}) - (x^{n-1} + a_{n-2,n-1} x^{n-2} + \dots + a_{0,n-1})$$

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} + a_{n-1,n} x^n + (a_{n-2,n} - 1) x^{n-1} + (a_{n-3,n} - a_{n-2,n-1}) x^{n-2} + (a_{0,n} - a_{1,n-1}) x + a_{0,n-1}.$$

En posant $a_{n,n+1} = a_{n-1,n}$, $a_{n-1,n+1} = a_{n-2,n} - 1$, $\dots$, $a_{1,n+1} = a_{0,n} - a_{1,n-1}$ et $a_{0,n+1} = a_{0,n-1}$, il existe donc des entiers relatifs tels que $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + a_{n,n+1} x^n + \dots + a_{0,n+1}$.

La propriété $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.

La propriété $\mathcal{Q}(n)$ est héréditaire.

La propriété $\mathcal{Q}(n)$ est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire pour $n \geq 1$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n, n \geq 1$.

Ainsi pour chaque $n \geq 1$, existent des entiers relatifs $a_{n-1,n}; \dots; a_{0,n}$ tels que $P_n(x) = x^n + a_{n-1,n} x^{n-1} + \dots + a_{0,n}$.

b). Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

On définit pour n entier naturel, la propriété $R(n)$: $P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$.

Pour $n = 0$, on a $P_0(2 \cos(\theta)) = 2$ et $2 \cos(0 \times \theta) = 2 \cos(0) = 2$ donc $P_0(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(0 \times \theta)$.

La propriété $R(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_{n+1}(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) P_n(2 \cos(\theta)) - P_{n-1}(2 \cos(\theta)).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $P_{n+1}(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) \times 2 \cos(n\theta) - 2 \cos((n-1)\theta)$.

Or $\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta - \theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) + \sin(n\theta) \sin(\theta)$.

Par suite $P_{n+1}(2 \cos(\theta)) = 4 \cos(\theta) \cos(n\theta) - 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - 2 \sin(\theta) \sin(n\theta)$

$$P_{n+1}(2 \cos(\theta)) = 2 (\cos(\theta) \cos(n\theta) - \sin(\theta) \sin(n\theta))$$

$$P_{n+1}(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(\theta + n\theta)$$

$$P_{n+1}(2 \cos(\theta)) = 2 \cos((n+1)\theta): R(n+1) \text{ est vraie.}$$

La propriété $R(n)$ est héréditaire.

La propriété $R(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire pour $n \geq 0$ donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n .

Ainsi pour tout entier naturel n , $P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$.

c). On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe un entier N non nul tel que $(1 + 2i)^N \in \mathbb{R}$.

On pose $\rho = |1 + 2i| = \sqrt{5}$ et $\theta = \arg(1 + 2i)$.

Alors $(1 + 2i)^N = \rho^N e^{iN\theta} = \rho^N (\cos(N\theta) + i \sin(N\theta))$.

Comme $(1 + 2i)^N \in \mathbb{R}$ alors $\sin(N\theta) = 0$ donc il existe un entier relatif k tel que $N\theta = k\pi$ d'où tel que $\theta = \frac{k\pi}{N}$.

On en déduit donc $\cos(N\theta) = \pm 1$.

Or d'après la question **b)**., on sait que $P_N(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(N \theta)$ d'où $P_N(2 \cos(\theta)) = \pm 2$.

Remarquons de plus que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ainsi $P_N\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in \mathbb{Z}$.

Montrons pour tout entier naturel n non nul que $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \notin \mathbb{Z}$.

On définit pour tout entier n non nul, la propriété $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_n}{(\sqrt{5})^n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $p_n \wedge 5 = 1$.

On a $P_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ avec $2 \in \mathbb{Z}$ et $2 \wedge 5 = 1$.

On a aussi $P_2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{6}{5} = \frac{-6}{(\sqrt{5})^2}$ avec $-6 \in \mathbb{Z}$ et $-6 \wedge 5 = 1$.

La propriété est donc vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

On fait l'hypothèse de récurrence que la propriété P_k est vraie pour $1 \leq k \leq n$.

On sait que $P_{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - P_{n-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe donc $p_n \in \mathbb{Z}$ et $p_{n-1} \in \mathbb{Z}$ avec $p_n \wedge 5 = 1$ et $p_{n-1} \wedge 5 = 1$ tels que

$$P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_n}{(\sqrt{5})^n} \text{ et } P_{n-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_{n-1}}{(\sqrt{5})^{n-1}}.$$

$$\text{On obtient alors } P_{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{p_n}{(\sqrt{5})^n} - \frac{p_{n-1}}{(\sqrt{5})^{n-1}} = \frac{1}{(\sqrt{5})^{n+1}} (2 p_n - 5 p_{n-1}).$$

On pose alors $p_{n+1} = 2 p_n - 5 p_{n-1}$.

On a $p_{n+1} \in \mathbb{Z}$.

On a aussi $p_{n+1} \wedge 5 = 1$.

En effet si $p_{n+1} \wedge 5 \neq 1$, comme 5 est premier, alors $5 \mid p_{n+1}$ d'où $5 \mid 2 p_n - 5 p_{n-1}$.

Or comme $5 \mid 5 p_{n-1}$ on obtient alors que $5 \mid 2 p_n$.

D'après le théorème de Gauss, comme $2 \wedge 5 = 1$, alors $5 \mid p_n$: contradiction.

Par suite $P_{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_{n+1}}{(\sqrt{5})^{n+1}}$ avec $p_{n+1} \in \mathbb{Z}$ et $p_{n+1} \wedge 5 = 1$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$. Elle est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul.

Ainsi pour tout entier naturel n non nul, $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_n}{(\sqrt{5})^n}$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $p_n \wedge 5 = 1$.

On en déduit que pour tout entier naturel n non nul, $P_n \notin \mathbb{Z}$.

En effet:

- si n est impair alors $(\sqrt{5})^n = (\sqrt{5})^{2k} \sqrt{5} = 5^k \sqrt{5}$ d'où $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_n}{5^{k+1}} \sqrt{5} \in \mathbb{Z}$ sinon $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$.

- si n est pair alors $(\sqrt{5})^n = (\sqrt{5})^{2k} = 5^k$ d'où $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{p_n}{5^k}$.

Alors si $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in \mathbb{Z}$, $p_n = 5^k q$ avec $q \in \mathbb{Z}$ ($k \geq 1$ puisque $n > 0$) donc $5 \mid p_n$: contradiction.

Dans tous les cas, pour tout entier naturel n non nul, $P_n\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \notin \mathbb{Z}$.

Or s'il existe un entier naturel N non nul tel que $(1 + 2i)^N \in \mathbb{R}$ alors $P_N\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in \mathbb{Z}$: contradiction.

Par conséquent, $(1 + 2i)^n$ n'est réel pour aucun entier naturel non nul n .