Test 5, Cpge

Composition de Mathématiques (Classe Terminale S)

Durée du test: 4 heures.

L'usage des calculatrices n'est pas auorisé.

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque.

Exercice 1:

Soit ABC un triangle du plan euclidien tel que $AB = 4$, $BC = 5$ et $CA = 7$.
On donnera l'ensemble des résultats sous forme d'un tableau contenant les valeurs exactes (et non approchées) demandées.

a). Calculer $\cos(\hat{A})$, $\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)$, $\sin(\hat{B})$.

b). Soit G l'isobarycentre (c'est à dire le centre de gravité) du triangle. Calculer la longueur AG.

c). Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer la longueur AH.

d). Soit I l'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{AB, AC})$ avec la droite (BC).
Calculer la longueur AI.

Exercice 2:

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\ln(x)}$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$.

a). On admet que $\dfrac{\ln(1+h)}{h} \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 1$. Quelle est la limite ℓ de f en 1 ?
On pose désormais $f(1) = \ell$.

b). Quelle est la limite ℓ' de f en 0 ? On pose désormais $f(0) = \ell'$.

c). Quelle est la limite de f en $+\infty$?

d). Donner la monotonie de f sur $[0; +\infty[$.

e). Tracer le graphe de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 3:

Une compagnie d'assurance assure un nombre égal de conducteurs de moins de 40 ans et de plus de 41 ans.
Les conducteurs de moins de 40 ans ont la probabilité a d'avoir un accident dans une année, ceux de plus de 41 ans ont la probabilité b.
La compagnie effectue un test en tirant au hasard un conducteur parmi l'ensemble des conducteurs.
Quelle est la probabilité que ce conducteur ait un accident lors de chacune des deux premières années ?

Exercice 4:

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $2^n + (-1)^{n+1}$ est divisible par 3.

Exercice 5:

Soit A l'ensemble des réels x tels qu'existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{Q}^4$ pour lequel $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$.

a). Montrer que, si x et y sont dans A, alors $x\ y$ est dans A.

b). On suppose que l'un au moins des quatre rationnels a, b, c, d n'est pas nul.
Montrer que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \neq 0$.

c). Soit x un élément non nul de A. Montrer que $\dfrac{1}{x} \in A$.

Exercice 6:

Soit a et b deux entiers naturels strictement positifs.
On pose $\delta = \mathrm{pgcd}(a; b)$ et $\mu = \mathrm{ppcm}(a; b)$.
Montrer que $\delta + \mu \geq a + b$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 7:

Soit $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les trois angles d'un triangle ABC du plan euclidien.

Montrer que $\sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{C}) \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 8:

Déterminer le nombre de zéros qui termine le nombre $\dbinom{571}{45}$ (écrit en base 10).

Exercice 9:

On pose $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$ et par récurrence, $P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) - P_{n-1}(x)$.

a). Montrer que, pour chaque $n \geq 1$, existent des entiers relatifs $a_{n-1,n}; \ldots; a_{0,n}$ tels que $P_n(x) = x^n + a_{n-1,n}\,x^{n-1} + \ldots + a_{0,n}$.

b). Montrer que pour tout réel θ, $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\,\theta)$.

c). Montrer que $(1 + 2\,i)^n$ n'est réel pour aucun entier naturel non nul n.