Olympiades de Mathématiques

Recueil d’exercices: divers problèmes …

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Problème 1: *carrés magiques*

a, b, c, d, e, f, g, h et i étant des entiers naturels n’ayant aucun diviseur autre que 1 en commun, on dit que le tableau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un carré magique multiplicatif (CMM) de produit P si et seulement si le produit des entiers de chacune des lignes, le produit des entiers de chacune des colonnes et celui des entiers de chacune des deux diagonales est égal à P.

1. Compléter les deux CMM suivants : $\begin{pmatrix} 2 & 9 & \square \\ \square & \square & 1 \\ 3 & 4 & \square \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & \square \\ 2^8 & \square & \square \\ \square & 2^6 & \square \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un CMM de produit P alors $e^3 = P$.

Ce résultat, même non démontré peut être utilisé par la suite.

3. Construire un CMM utilisant tous les diviseurs de 100.

4. Montrer que si e est un nombre premier, alors il n’y a que quatre carrés magiques possibles.

5. Construire un carré magique de produit 27000 dont tous les termes sont différents.

Problème 2: *Année étoilée*

On s’intéresse aux nombres entiers non nuls N possédant la propriété (*) suivante :
N peut s’écrire comme somme de deux entiers dont le produit est divisible par N.
On appellera composantes de N, des entiers a et b convenables et on pourra dire N est étoilé.
Exemple: 9 est étoilé car $9 = 3 + 6$ et $3\times6 = 18$ est divisible par 9.
On dit que le nombre entier N est un carré parfait s’il existe un nombre entier a tel que $a^2 = N$.
On dit qu’un nombre entier est premier s’il est plus grand que 1 et s’il n’est divisible que par 1 et par lui-même.

1. Trouver tous les nombres entiers jusqu’à 20 qui sont étoilés et ceux qui ne le sont pas.

2. Montrer que 25 et 36 sont étoilés, puis montrer que si N est un carré parfait alors N est étoilé.

3. Soit N un entier étoilé et p un diviseur premier de N ($p > 1$) ; montrer que p divise les deux composantes de N.

4. Montrer que 2009 est étoilé.

5. Montrer que si $N = p\times q$ avec p et q premiers alors N n’est pas étoilé. Que dire de 2010 ?

6. Soit N un nombre entier non nul, donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit étoilé.

Problème 3: *carrés naturels*

0	**1**	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**
15	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**

Le carré ci-dessus est qualifié de naturel, car on y a écrit les nombres entiers naturels dans l'ordre, ligne après ligne, d'une façon toute « naturelle ».

1. Choisissez cinq nombres de ce carré de telle façon que deux quelconques d'entre eux n'appartiennent jamais ni à la même ligne, ni à la même colonne. Calculez ensuite la somme de ces cinq nombres.
Recommencez avec cinq autres nombres choisis de la même façon. Que constatez-vous ?

2. En utilisant cinq couleurs différentes, coloriez les 25 cases du carré de telle sorte que deux cases quelconques de la même couleur n'appartiennent jamais ni à la même ligne, ni à la même colonne. On appellera un tel coloriage un « bon coloriage ».
Calculez la somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur. Que constatez-vous ?

3. Le nombre écrit à l'intersection de la 2ème ligne et de la 4ème colonne est 8.
Exprimez la valeur du nombre écrit à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne en fonction de i et de j.

4. Démontrez que dans n'importe quel « bon coloriage » d'un carré naturel 5×5 la somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur est une constante.

5. Dans un carré de 100 cases sur 100 cases, on a écrit les nombres de 0 à 9 999.
On admet qu'il est possible de réaliser un « bon coloriage » à l'aide de 100 couleurs dans un carré 100×100.
Calculez la somme des nombres écrits dans les cases d'une même couleur d'un tel carré

Problème 4: *les n-machines*

Soit n un entier naturel compris entre 2 et 10.
Une « n-machine » n'effectue que des calculs utilisant les quatre opérations sur des nombres entiers naturels.
Pour cette « n-machine », a, b et c étant des entiers naturels compris entre 0 et $n-1$, le nombre noté $\overline{a\,b\,c}$ représente le nombre $a\,n^2 + b\,n + c$.
Il existe donc neuf n-machines différentes.
Par exemple, pour la « 4-machine » :

- le nombre noté $\overline{231}$ représente le nombre $2\times4^2+3\times4+1=45$;
- le nombre noté $\overline{1\times3}$ représente le nombre $1\times4+3=7$;
- le nombre noté $\overline{2}$ représente le nombre .

1). Quel nombre représente le nombre noté $\overline{231}$ pour la « 7-machine » ?

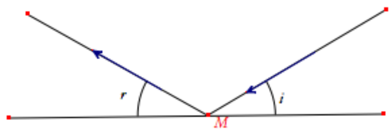
2). Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) : $\overline{3}\,x+\overline{43}=\overline{211}$.
Quelle valeur doit-on donner à n pour que la «n-machine » affiche « 21 » comme solution ?

3). Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) : $x^2-\overline{45}\,x+\overline{322}=\overline{0}$.
Une autre « n-machine » affiche deux solutions entières comme solutions de cette équation.
a). Quelle « n-machine » a-t-on utilisée ? (Il faut donc trouver la "bonne" valeur de n)
b). Quelles sont les solutions affichées par cette machine ?

Problème 5: *après réflexion …*

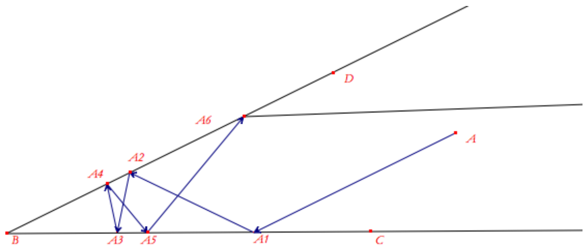
Lorsqu'un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir plan en un point M, l'angle i d'incidence et l'angle r de reflexion sont égaux.

Figure 1:



BC et BD sont 2 miroirs de grande longueur formant un angle α non nul compris entre 0° et 90°. Un laser positionné en A émet un rayon vers BC parallèlement à BD, qui se réfléchit en A_1.
Si $\alpha \neq 90$ °, (figure 2) le rayon réfléchi se dirige alors vers le point A_2 de BD en s'approchant de B et subit une nouvelle réflexion.

Figure 2:



On veut étudier le nombre k de fois que le rayon frappe l'un ou l'autre des miroirs.

1. Analyse de quelques cas particuliers.

a. Que vaut le nombre k lorsque $\alpha = 90$ °? $\alpha = 60$ °? $\alpha = 45$ °?

b. Sur la figure 2, l'angle α vaut 26°. Déterminer les différents angles i_n et r_n en chacun des points A_n ($1 \leq n \leq 6$) où le rayon est réfléchi.

2. Analyse du cas général.

Dans cette question, on suppose que α est quelconque entre 0° et 90° (α différent de 0° et de 90°).

a. Le rayon peut-il s'approcher indéfiniment de B ?

b. Déterminer un encadrement du nombre k en fonction de α ?

c. Quelles valeurs entières peut-on donner à α pour avoir $k = 25$?

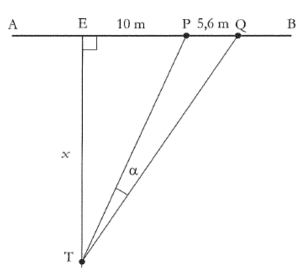
Problème 6: *à l'essai*

Au rugby, où le tireur doit-il déposer le ballon pour s'ouvrir au maximum l'angle du but ?

Sur le schéma ci-joint, le segment $[AB]$ représente la ligne d'essai d'un terrain de rugby (marquer un essai consiste à déposer le ballon sur cette ligne ou au-delà.

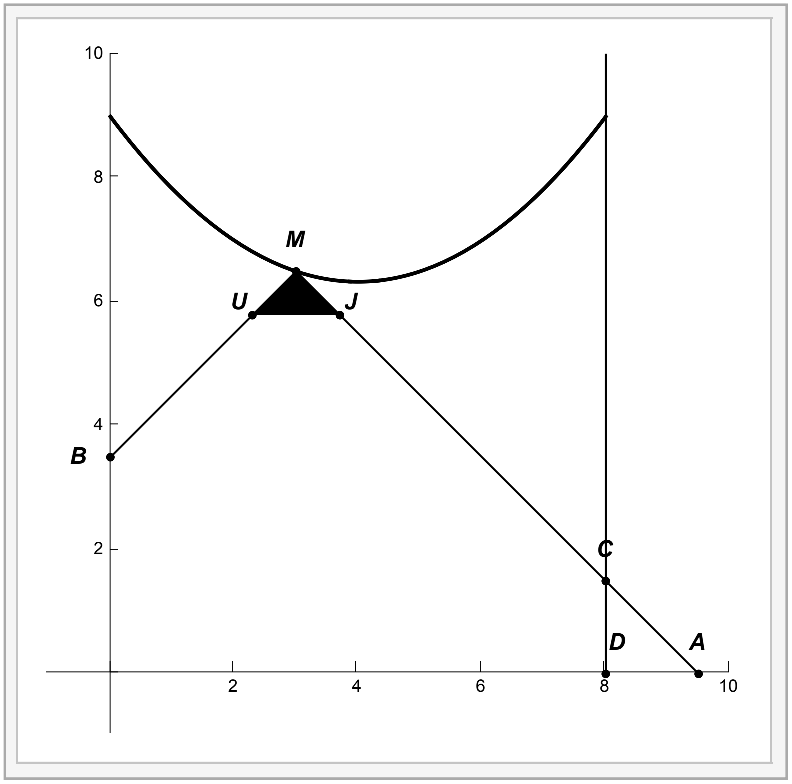
Les poteaux de but sont représentés par les points P et Q. On sait que $PQ = 5, 6$ m.

Un essai a été marqué en E, à gauche du poteau P et à 10 mètres de celui-ci.
Transformer cet essai consiste à tirer d'un point de son choix situé sur la perpendiculaire en E à (AB) et à faire passer le ballon entre les poteaux.
On admettra que le point T, point idéal de tir, est celui pour lequel l'angle $\alpha = P\hat{T}Q$ est maximal.
Calculer la distance $x = ET$ pour laquelle cette angle est maximal.



Problème 7: *L'abat-jour parabolique*

Une lampe entourée d'un abat-jour est suspendue entre deux murs distants de 8 mètres à une rampe. La situation est représentée par le schéma ci-dessous.



Les murs ont pour équations $x = 0$, $x = 8$ et la rampe a pour équation $y = \frac{1}{6}(x-4)^2 + \frac{19}{3}$.

L'abat-jour est symbolisé par un triangle rectangle isocèle UMJ de côtés 1 et $\sqrt{2}$.

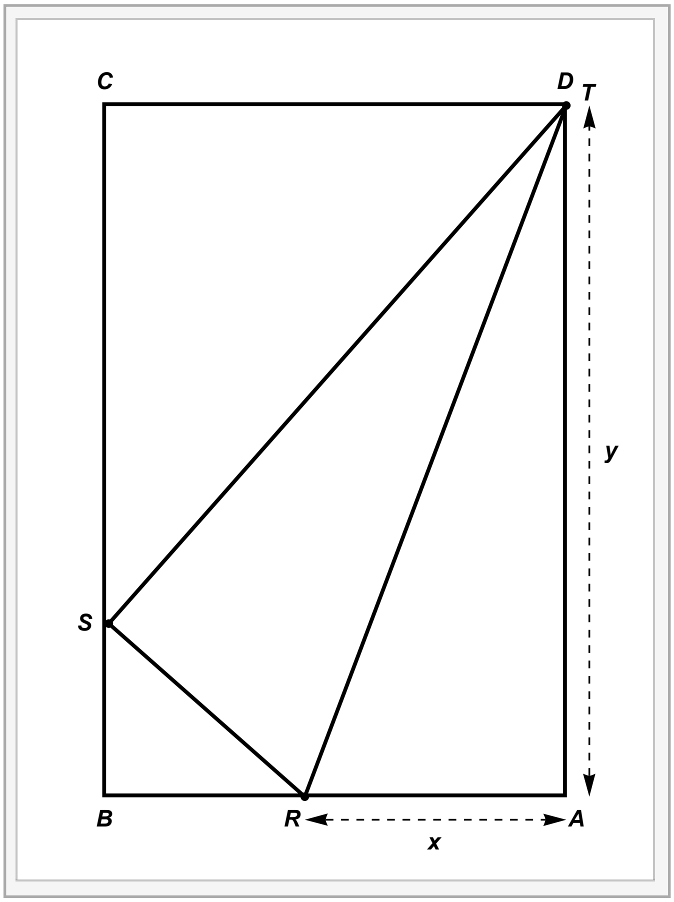
1. Vérifier que les bords de l'abat-jour ne touchent ni la rampe ni les murs lorsque $1 < x < 7$.

2. Calculer l'aire du polygone éclairé $OBMCD$ correspondant à $x = 3$.

3. Trouver la position de la lampe sur la rampe qui donne un éclairage maximal.

Problème 8: *Pliages.*

Soit $ABCD$ un e feuille rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$.
Soit R un point de $[AB]$ (bord inférieur de la feuille) et T un point de $[AD]$ (bord droit de la feuille).
On replie la feuille suivant le segment $[RT]$ et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille).



Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[BC]$ (bord gauche de la feuille). On pose $AR = x$ et $AT = y$.

1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x .

2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.

3. Trouver la valeur de x pour laquelle la partie repliée (triangle RST) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

Problème 9:

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls $(a\,;b)$ qui vérifient l'équation:

(E) : $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

1. On suppose que $(a\,;b)$ est un couple d'entiers naturels solution de (E).

a. Démontrer que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.

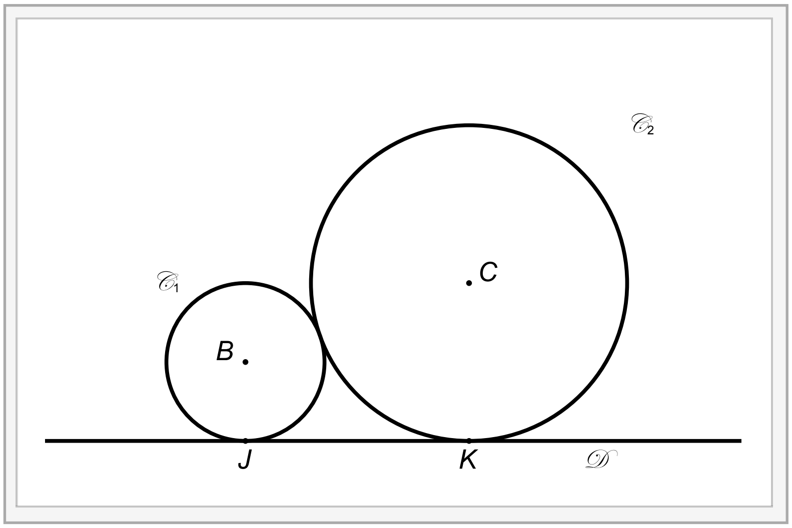
b. En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on ait: $a = n^2$ et $b = (n+1)^2$.

2. Résoudre l'équation (E).

PARTIE B

1. Deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centres respectifs B et C et de rayons respectifs b et c sont situés du même côté d'une droite $\mathscr{D}$, tangents à cette droite respectivement en J et K, et tangents entre eux (figure 1).

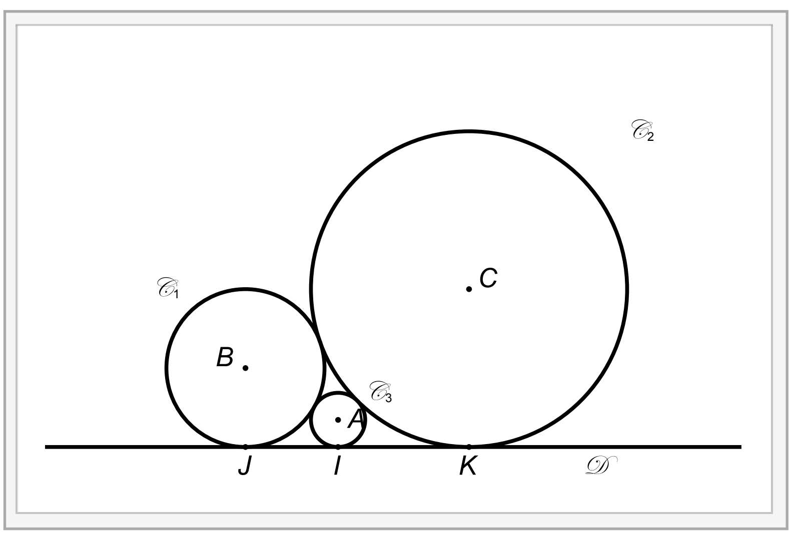
Figure 1:



Démontrer l'égalité $KJ^2 = 4\,b\,c$.

2. On reprend la figure 1, et l'on rajoute un cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon a, qui est tangent à la droite $\mathscr{D}$ en I, et tangent extérieurement aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ (figure 2).

Figure 2:



Démontrer l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

3. On considère la figure de la question 2.

a. Donner une infinité de cas où les trois rayons sont des entiers, l'un étant le produit des dexu autres.

b. Donner un cas où les trois rayons sont des entiers et où le rayon du petit cercle est égal à 2010.

Problème10: Racines millésimées

Définition:
On appelle partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x, c'est à dire que l'on a pour tout réel x, $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Par exemple $E(\,2,\,4\,) = 2$, $E(\,-2,\,4\,) = -3$, $E\left(\sqrt{2}\,\right) = 1$, $E(5) = 5$ et $E(-\pi) = -4$.

Soit f la fonciton définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 - 46\,E(x) + 13$.

L'objet de cet exercice est la réoslution de l'équation $f(x) = 0$, notée (1).

1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{2057}$, puis vérifier que ce réel est solution de l'équation **(1)**.

2.a. Montrer que le réel 1 n'est pas solution de l'équation **(1)**.

b. Montrer que si $x < 1$ (dans ce cas $E(x) \leq 0$), l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

On note p le trinôme défini pour tout réel x par $p(x) = x^2 - 46\,x + 13$.

3.a. En utilisant l'inégalité $E(x) \leq x$, montrer que pour tout réel x, $p(x) \leq f(x)$.

b. En déduire que si x est un réel vérifiant $p(x) > 0$, alors le réel x n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.

4. Pour tout réel x, donner le tableau de signe de $p(x)$.
On pourra déterminer la forme canonique puis la forme factorisée de p(x).
En déduire que toute solution de $f(x) = 0$ est strictement inférieure à 46.

5.a. Justifier l'inégalité $x - 1 < E(x)$ et en déduire que pour tout réel x, $f(x) < p(x) + 46$.

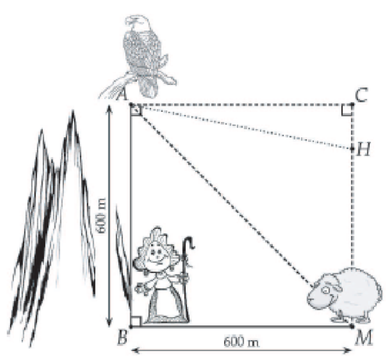
b. Montrer alors que toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est strictement supérieure à 44.

6.a. Quelles sont les valeurs possibles pour la partie entière des solutions de l'équation $f(x) = 0$?

b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, $\sqrt{2057}$ et une autre α dont on précisera la valeur exacte.

Problème 11: *nid d'aigle*

Un aigle se trouve dans son nid (point A) sur un piton rocheux à 600 m au desus d'une prairie. Un mouton (point M) se trouve dans la prairie à 600 m de la verticale du rocher (point B).



L'aigle peut progresser de deux manières:

- en chute libre à la verticale à la vitesse de 156 km/h
- en piqué direct sur un point fixé dans n'importe quelle direction, mais pas à la verticlae, à la vitesse de 60 km/h.

L'aigle peut attaquer de plusieurs façons:

- soit piquer directement en M ;
- soit voler directement jusqu'en C, puis en chute libre, tomber sur le mouton ;
- soit encore piquer jusqu'en H, point du segment $[C\,M]$ et ensuite tomber en chute libre sur le mouton.

La bergère (au point B), qui a vu le danger, peut se rendre près du mouton avec sa mobylette en 48 secondes. Pourra-t-elle, à coup sûr, sauver son mouton ?