Olympiades de Mathématiques

Recueil d'exercices: Énigmes et jeux de logique, petits problèmes

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Il s'agit de trouver non pas seulement une réponse juste mais bien entendu de savoir comment on a toruvé cette réponse. Un schéma peut-être suffisant.

Énigmes:

Les énigmes ci-dessous sont des énigmes classiques. Certaines sont à la base de théorie mathématiques éventuellement. Il est agréable de savoir y répondre. Elles sont de difficultés inégales.

ÉNIGME 1

Cinq pirates ont à se partager un magot de 12 lingots d'or. Respectueux de leurs anciens, ils ont décidé de procéder de la façon suivante:

• Le plus âgé d'entre eux propose une répartition des lingots.
• Les pirates votent pour ou contre cette répartition.
• Si la majorité l'accepte, le partage est entériné. Sinon, le plus âgé est éliminé et les autres se partagent le magot toujours suivant le même procédé.

Sachant que les pirates sont tous à la fois cupides et intelligents, combien de lingots le plus âgé va-t-il obtenir?

La majorité s'entend ainsi: pour que le vote soit accepté, il faut que le nombre de voix pour soit strictement supérieur à la moitié du nombre de votants.

ÉNIGME 2: LES POIGNÉES DE MAIN DE BOURBAKI

Le couple Bourbaki reçoit 5 autres couples. Chacun peut serrer la main d'autres personnes, mais pas la sienne ni celle de son conjoint.
À un moment de la soirée, Mr Bourbaki demande à chacun (y compris sa femme) combien il a serré de main et obtient des réponses toutes différentes. Combien de mains Mr Bourbaki a-t-il serré?

Pour aller plus loin: et s'il y a n couples invités?

ÉNIGME 3: L'ÂGE DES ENFANTS.

Un ami à moi (facétieux de nature) a trois enfants que je n'ai jamais vus. Un beau jour, m'enquérant de leur santé, je me rendis compte que je ne connaissais rien d'eux, pas même leur âge. Je le demandais aussitôt à mon ami. Ceci donna lieu au dialogue suivant:

(Mon ami) Le produit de leurs âges fait 36.
(Moi) …
(Lui) La somme de leurs âges est égale au numéro de ton département d'origine.
(Moi) Ça ne me donne toujours pas la réponse.
(Lui) Ah, j'oubliais. L'ainé a les yeux bleus, comme sa mère.
(Moi) Ça y est! Je connais leurs âges.

Mais, au fait, quels sont-ils, ces âges?

ÉNIGME 4

Deux pères et deux fils partent ensemble à la chasse. Ils ont tué chacun une bécasse. De retour chez eux, ils cuisinent leurs trois bécasses. Y a t'il une erreur dans cette histoire?

ÉNIGME 5

On dispose:

- d'un récipient de 13 litres;
- d'un récipient de 6 litres;
- un robinet d'eau;
- une évacuation.

Par contre on n'a pas la possibilité de faire des inscriptions sur les récipient. Comment parvenir à doser 11 litres?

ÉNIGME 6

10 sacs contiennent théoriquement chacun 10 pièces de 10 grammes chacune. Or un sac est rempli de fausses pièces, qui, elles pèsent 9 grammes. On dispose d'une balance et de ses poids, ce qui permet d'avoir une pesée au gramme près. Comment savoir, EN UNE SEULE PESÉE, quel est le sac en question?

ÉNIGME 7: LA CHÈVRE, LE LOUP ET LE CHOU.

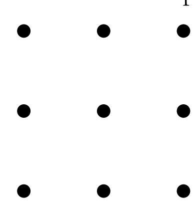
Un berger possède une chèvre, un loup et un chou. Il doit les faire passer de l'autre côté de la rivière avec sa barque, qui ne supporte qu'un seul des trois éléments en même temps. En l'abscence du berger, la chèvre mange le chou et le loup mange la chèvre. Comment doit s'y prendre le berger?

ÉNIGME 8

Un chevalier dans un labyrinthe, se retrouve face à 2 chemins, celui de droite et celui de gauche. L'un mène à la sortie, l'autre mène tout droit à la mort.
Devant chaque sortie se trouve un elfe. Les 2 elfes connaissent le bon chemin. Cependant l'un ment et l'autre dit la vérité, mais le chevalier ne sait pas à qui se fier. Il n'a le droit de poser qu'une seule question à un seul des 2 elfes.
Quelle est la question qui lui permet à coup sûr de déterminer le bon chemin?

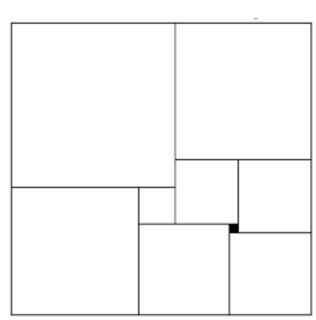
ÉNIGME 9: 9 POINTS!

Comment relier ces 9 points, à l'aide de 4 lignes droites ET sans lever la pointe du crayon?



ENIGME 10:

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté 1 unité. Quelles sont les dimensions de ce rectangle?



Les problèmes proposés ci-dessous sont pour la pluplart tirés d'olympiades diverses.
En particulier des Olympiades académiques françaises.
Il faut penser à mettre en place des systèmes mathématiques développés pendant l'année, en n'hésitant pas à forcer un peu plus qu'en classe, c'est à dire à mieux utiliser encore vos connaissances et les méthodes.

Problème 1: Les jeux sont faits.

Une roulette "parfaite" comporte 18 cases noires et 18 cases rouges. Une manière de jouer est la suivante : on mise une certaine quantité d'argent sur une couleur, puis la roulette est lancée; si la boule s'arrête sur la couleur sur laquelle on a misé, on double sa mise (on récupère sa mise, et autant d'argent en plus que sa mise); sinon, on perd sa mise.

Si je rentre dans le casino avec 100 euros en poche, ai-je des chances de ressortir avec 500 euros en ne jouant que 4 fois ? Et si je ne limite pas le nombre de fois où je joue ? Y-a-t-il une tactique qui me permette, en jouant de nombreuses fois, d'être globalement gagnant?

Les vraies roulettes de casino ne sont pas comme celle décrite ci-dessus; elles comportent 18 cases noires, 18 cases rouges, et 1 case verte (sur laquelle on ne peut pas miser). Cela change-t-il quelque chose?

Problème 2:

Une épreuve de mathématiques comporte quatre questions.
Pour chaque question, on obtient 0 point si la réponse est fausse ou 5 points si la réponse est bonne.
Une des questions consiste à trouver l'aire totale des six faces d'un cube dont le côté s'exprime par un nombre entier de mètres.
Une autre des questions est la suivante :
« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 euros, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? »

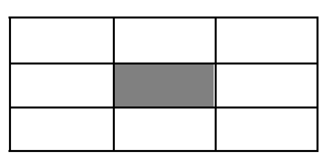
Les réponses des élèves, sans unité, sont données par le tableau suivant :

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Les notes 0 et 20 ont toutes deux été attribuées. Quelles sont les notes de chacun des élèves ? Justifier les réponses données.

Problème 3: la tour

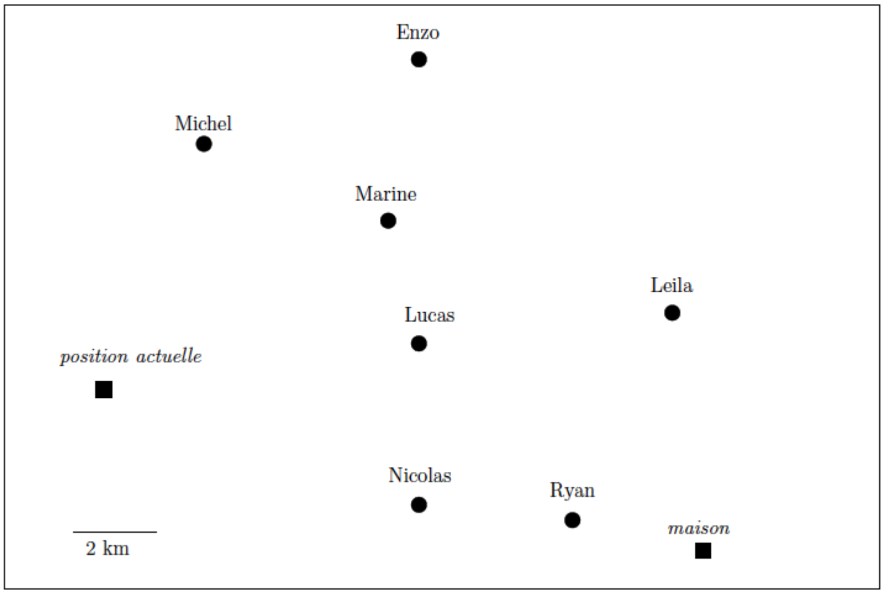
Au trente-septième étage d'une tour vivent vingt personnes réparties dans huit appartements disposés ainsi:



Les heureux élues qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au nord, font face à la prison. Quant à ceux qui regardent à l'ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial. Aucun appartement n'est vide ; en revanche, les Dupont, qui sont l'unique famille nombreuse de l'étage, se trouvent à l'étroit dans leur F4.
Au fait, quel appartement habitent les Dupont et combien sont-ils ?

Problème 4: *la tête dans le guidon.*

Parti de chez moi pour une balade en vélo, je me retrouve, après avoir roulé 1h30, à 15km de ma maison. Je souhaite, avant de rentrer chez moi, visiter tous mes amis sur la figure suivante; comment faire pour parcourir le moins de chemin possible, et, une fois rentré, quelle vitesse moyenne puis-je espérer avoir réalisée sur toute la balade?



Problème 5: Grille Logique

Remplir la grille à l'aide des nombres de 1 à 25 en respectant les critères donnés et la règle suivante:
(R): Deux nombres consécutfis ne peuvent pas être placés dans des cases voisines (par le côté ou par le sommet).

	A	B	C	D	E
a					
b					
c					
d					
e					

A: les nombres sont ordonnés (du plus petit au plus grand ou du plus grand au plus petit)
B: la différence entre le plus grand et le plus petit vaut 23
C: les nombres sont multiples de trois
D: la somme des deux premiers nombres égale celle des deux derniers
E: Les nombres sont multiples de cinq
a: la somme des nombres vaut 110
d: le produit des nombres vaut 15015
e: les nombres sont des carrés d'entiers

Décrire le remplissage de la grille en justifiant chaque étape.

Problème 6:

Bob : « Salut Alice ! Tiens, c'est un trinôme du second degré que tu as écrit dans la marge de ta feuille. Quelles en sont les racines ? »
Alice : « Ce sont deux entiers positifs. L'une des racines est mon âge, et l'autre est l'âge de mon petit frère Clément. »
Bob : « C'est amusant ! Voyons, si je peux deviner quel âge vous avez, Clément et toi. Cela ne devrait pas être trop difficile, puisque les coefficients sont entiers. Je crois deviner ton âge, il me suffit de vérifier
en remplaçant x par ce nombre. . .
Zut ! Cela donne -55 au lieu de 0. »
Alice : « C'est que je n'ai pas cet âge là !. . . »
Bob : « Sans doute. A propos si je remplace x par 1 j'obtiens la somme des coefficients. »
Alice : « Effectivement ! Il faut aussi que tu saches que cette somme est égale à mon âge moins un. »

David qui a tout entendu, donne alors l'âge de Clément et celui d'Alice.
a. Prouver que Clément est âgé de 2 ans.
b. Déterminer l'âge d'Alice, sachant qu'elle a entre 10 et 50 ans.

Problème 7:

L'intérieur d'un quadrilatère $ABCD$ est partagé en 4 triangles par ses diagonales. Les centres des cercles circonscrits à ces 4 triangles forment un quadrilatère $STUV$.

1. Montrer que $STUV$ est toujours un parallélogramme.

2. Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère $ABCD$ pour que $STUV$ soit un carré ?

Problème 8:

On écrit tous les nombres de 1 à 2010 les uns à la suite des autres.
On note N l'entier ainsi obtenu: $N = 1234\ldots20092010$.

1. Combien l'entier N a-t-il de chiffres ?

2. Quel est le 2010$^{\text{ième}}$ chiffre de N ?

3. Combien y a-t-il de 0 dans l'écriture de N ?

4. N est-il divisible par 3 ?

Problème 9:

Soit P le polynôme de degré 2000 tel que pour tout entier n, $0 \leq n \leq 2000$, on ait $P(n) = \dfrac{n}{n+1}$.

Calculer $P(2001)$.

On pourra utiliser le polynôme Q défini par $Q(x) = (x + 1)\,P(x) - x$.

Problème 10: *la fourmi ravitailleuse*

Des fourmis se déplacent, en ligne droite, à la queue leu leu, à vitesse constante, en formant une colonne de 50 cm de long.
La dernière fourmi du groupe décide d'aller ravitailler la fourmi chef et pour cela rejoint la tête de la colonne puis, sa mission étant accomplie, retourne aussitôt à la queue de la colonne.
Sachant que, pendant cet aller-retour, la vitesse de cette fourmi est restée constante et que la colonne a parcouru 50 cm, quelle est la distance parcourue par la fourmi ravitailleuse ?

Problème 11: *concombres!*

1). Un concombre de 300 gr est cueilli à 98% d'eau. Après transport à la livraison, il ne contient plus que 97% d'eau. Quelle est sa masse?

2). La conversation ci-dessous a été entendue sur un marché. Qui est de bonne foi, d'après vous et pourquoi?

"Mes champignons sont très frais, ils sont composés de 99% d'eau, c'est un régal de fraîcheur!" clame le marchand.
Louise: "Je vous en achète 2 kg, que vous voudrez bien me livrer demain."
Le lendemain à la livraison:
Louise: "Dites donc, ils ont perdu au moins la moitié de leur poids, vos champignons!".
Le marchand: "C'est impossible, Madame, ils contiennent encore 98% d'eau!" réplique le marchand.

Problème 12: L'Amazone ...

Deux barques partent en même temps des deux rives opposés de l'Amazone et naviguent à vitesse constante.
L'un étant plus rapide que l'autre, ils se croisent à 1500 m de la rive la plus proche.
Arrivés à destination, les deux bâteaux restent à quai 25 minutes, le temps du débarquement des passagers et de l'embarquement de nouveaux passagers, puis larguent les amarres pour repartir vers leur point de départ.
Ils se croisent une seconde fois à 700 m de la rive la plus proche.
Quelle est la largeur de l'Amazone entre ces deux rives?

Problème 13:

Montrer que parmi 13 réels choisis au hasard 2 à 2 distincts, on peut toujours en trouver 2 vérifiant $0 < \dfrac{a-b}{1+ab} < 2-\sqrt{3}$.