Préparation aux olympiades de première

Correction

Fonctions

Exercice 1:

Exercice 2:

On pose v_C la vitesse de la colonne et v_f la vitesse de la fourmi ravitailleuse.

On peut assurer $v_c \leq v_f$.

Soit t_a le temps de l'aller, d_a la distance aller, t_r et d_r le temps et la distance retour.

On a:

- $d_a = v_f\, t_a = 50 + v_c\, t_a$. En effet pendant le temps t_a la colonne parcourt la distance $v_c\, t_a$ et la fourmi parcourt la longueur de la colonne en plus.
- $d_r = v_f\, t_r = 50 - v_c\, t_r$. En effet pendant le retour, la fourmi va dans le sens contraire de la colonne donc elle parcourt la longueur de la colonne moins la distance parcourue par la colonne pendant ce temps.

On en déduit $t_a = \dfrac{50}{v_f - v_c}$ et $t_r = \dfrac{50}{v_f + v_c}$.

D'autre part, on sait que pendant le temps $t_a + t_r$, la colonne a parcourue 50 cm à la vitesse v_c.

Donc $t_a + t_r = \dfrac{50}{v_c}$.

On en déduit l'équation $\dfrac{50}{v_f - v_c} + \dfrac{50}{v_f + v_c} = \dfrac{50}{v_c}$.

On a $v_c > 0$ donc, en factorisant par v_c, $\dfrac{1}{\frac{v_f}{v_c} - 1} + \dfrac{1}{\frac{v_f}{v_c} + 1} = 1$ et en posant $x = \dfrac{v_f}{v_c}$, le nombre x est solution de l'équation $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = 1$.

Cette équation s'écrit $\frac{x+1+x-1-(x-1)\,(x+1)}{(x-1)\,(x+1)} = 0$ et après simplification, comme $(x-1)\,(x+1) \neq 0$ (en effet $x = \dfrac{v_f}{v_c} > 1$), le nombre x est donc solution de l'équation du second degré $x^2 - 2\,x - 1 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = 8 > 0$, l'équation admet donc 2 solutions $x_1 = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2} > 1$.

Par suite on en déduit $x = \dfrac{v_f}{v_c} = 1 + \sqrt{2}$ d'où $v_f = \left(1 + \sqrt{2}\right) v_c$.

Alors la distance parcourue par la fourmi est $d_f = v_f(t_a + t_r) = \left(1 + \sqrt{2}\right) v_c(t_a + t_r) = 50\left(1 + \sqrt{2}\right)$ cm.

En effet, on sait que $v_c(t_a + t_r) = 50$.

Exercice 3:

Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment $[B\,C]$ (bord gauche de la feuille).

On pose $A\,R = x$ et $A\,T = y$.

1). Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
Remarquons que replier la feuille par rapport à $(R\,T)$ revient à considérer que S est le symétrique de A par rapport à $(R\,T)$.
On sait que $x \in [0; 4]$.
Affinons cet encadrement.
La valeur $x = 4$ convient. On a alors $R = B$.
En effet, en choississant alors $y = 4$, le quadrilatère $ARST$ est un carré: $S \in [B\,C]$ et les points A et S sont bien symétriques par rapport à $(R\,T)$.
La valeur maximale de x est donc 4.

Déterminons la valeur minimale.
Il est clair par symétrie et du fait que $S \in [B\,C]$ que $R\,S \geq B\,R$ donc $x \geq 4 - x$ d'où $x \geq 2$.
Affinons le résultat. La valeur $x = 2$ ne convient pas. Il faudrait alors $A = B = S$ et donc $(R\,T) \perp (A\,B)$: impossible.
La longueur x est minimale si la droite $(T\,R)$ a une pente maximale.
Il est donc clair qu'il faut $y = 6$: $T = D$. Ainsi on a aussi $T\,S = 6$.
Dans cette configuration, le triangle STC est rectangle en C.
D'après Pythagore, on obtient $S\,C^2 = 6^2 - 4^2 = 20$ d'où $S\,C = 2\sqrt{5}$.
Or on a aussi dans le triangle SBR rectangle en B, $S\,R^2 = S\,B^2 - B\,R^2$ d'où $\left(6 - 2\sqrt{5}\right)^2 = x^2 - (4 - x)^2$ d'où $8\,x - 16 = 56 - 24\sqrt{5}$ et ainsi $x = \frac{1}{8}\left(72 - 24\sqrt{5}\right) = 9 - 3\sqrt{5}$.
La valeur minimale pour x est $9 - 3\sqrt{5} \approx 2,292$.

2). On considère un repère orthonormé d'unité 1 cm d'origine B et d'axes $[B\,A)$ et $[B\,C)$.
On note s l'ordonnée de S.
La droite $(A\,S)$ a pour équation $y = -\frac{s}{4}\,x + s$.
Comme la droite $(R\,T)$ est la médiatrice du segment $[A\,S]$, alors elle est perpendiculaire à $[R\,T]$ en son milieu donc son coefficient directeur est $-\frac{1}{-s/4} = \frac{4}{s}$.
De plus elle passe par le milieu de $[R\,S]$ de coordonnées $\left(2; \frac{s}{2}\right)$.
Donc elle admet pour équation $y = \frac{4}{s}\,x + \left(\frac{s}{2} - \frac{8}{s}\right)$.
Le point R de coordonnées $(4 - x; 0)$ appartient à cette droite donc $0 = \frac{4}{s}\,(4 - x) + \left(\frac{s}{2} - \frac{8}{s}\right) = \frac{8}{s} + \frac{s}{2} - \frac{4\,x}{s}$.
Le point T de coordonnées $(4; y)$ appartient à cette droite donc $y = \frac{4}{s} \times 4 + \left(\frac{s}{2} - \frac{8}{s}\right) = \frac{8}{s} + \frac{s}{2}$.
On en déduit donc $y - \frac{4\,x}{s} = 0$ d'où $y = \frac{4\,x}{s}$.
D'autre part le triangle RBS est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, $R\,S^2 = B\,R^2 + B\,S^2$ d'où $s^2 = x^2 - (4 - x)^2 = 8\,x - 16$.
En effet on sait par symétrie que $R\,S = A\,R = x$.
Par suite $s = \sqrt{8\,x - 16}$ ($s \geq 0$ donc on ne peut avoir $s = -\sqrt{8\,x - 16}$) et finalement $y = \frac{4\,x}{\sqrt{8\,x - 16}}$.

3). Le triangle RST est rectangle en S donc son aire est donnée par $\frac{x\,y}{2} = \frac{2\,x^2}{\sqrt{8\,x - 16}}$.

On étudie la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{8x-16}}$.

On a $f'(x)=\dfrac{4x\sqrt{8x-16}-2x^2\times\frac{8}{2\sqrt{8x-16}}}{\left(\sqrt{8x-16}\right)^2}=\dfrac{4x(8x-16)-8x^2}{(8x-16)\sqrt{8x-16}}=\dfrac{x(3x-8)}{2(x-2)\sqrt{2x-4}}$.

Or $x>2$ donc $x>0$ et $2(x-2)\sqrt{2x-4}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3x-8$ pour $x\in]2;+\infty[$.

On en déduit que $f'(x)<0$ pour $x\in]2;\frac{8}{3}[$ et $f'(x)>0$ pour $x\in]\frac{8}{3};+\infty[$.

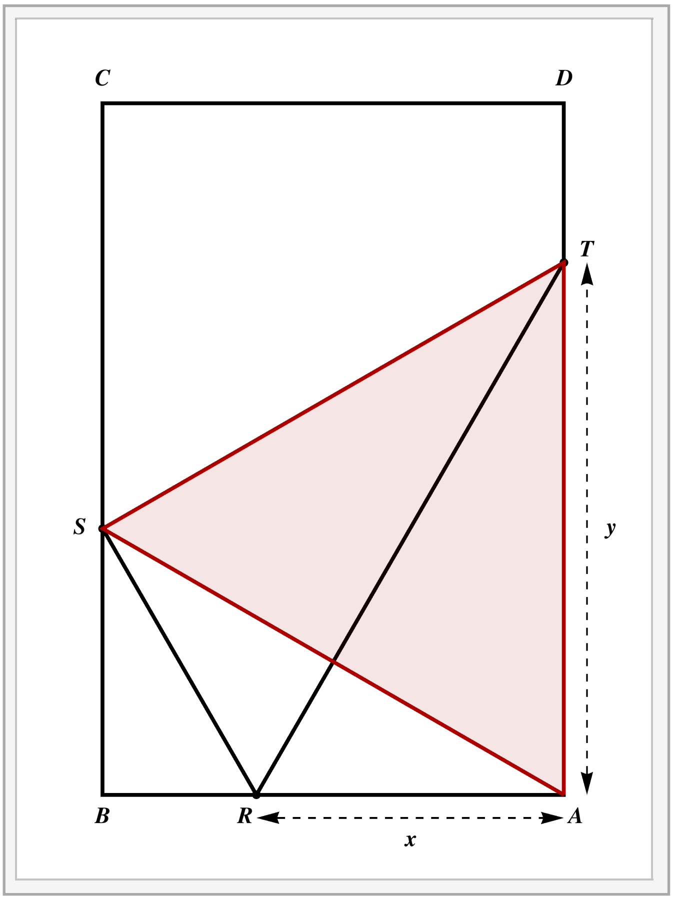
Finalement la fonction f admet un minimum en $x=\frac{8}{3}$. Cette aire minimale est alors $f\left(\frac{8}{3}\right)=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$.

On a donc $x=\frac{8}{3}$. Par suite $y=\dfrac{4\times\frac{8}{3}}{\sqrt{8\times\frac{8}{3}-16}}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

On a dans le triangle ASB rectangle en B, $AS^2=BA^2+BS^2=4^2+s^2$.

Or $y=\dfrac{4x}{s}$ d'où $s=\dfrac{4x}{y}=\dfrac{4\times\frac{8}{3}}{\frac{8\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Ainsi $AS^2=16+\dfrac{16}{3}=\dfrac{64}{3}$ d'où $AS=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

Rappellons que $TA=TS$ par symétrie. Donc $TA=TS=AS$.
Le triangle AST est équilatéral.



Exercice 4:

1). Comme $UJ = \sqrt{2}$, la distance des bords extérieurs de l'abat-jour, c'est à dire de U et de J par rapport aux murs respectivement gauche et droit est égal à respectivement $x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $8 - \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (8 - x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi pour $1 \le x \le 7$, $x - \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ et $(8 - x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \ge 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.
donc l'abat-jour ne touche pas les murs.

Ensuite, une condition suffisante pour que l'abat-jour ne touche pas la rampe est que les droites (MJ) ou (MU) ont une pente supérieure à la pente de la tangente à la rampe en M.
En effet, étant donné que la rampe est une parabole, tournée vers les y positifs, on peut assurer que tout ce qui se trouve en-dessous de la tangente en M est en dessous de la rampe.
Les coefficients directeurs des droites (MJ) et (MU) sont respectivement 1 et -1.

Le coefficient directeur de la tangente à la rampe en M d'abscisse x est donné par $f'(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

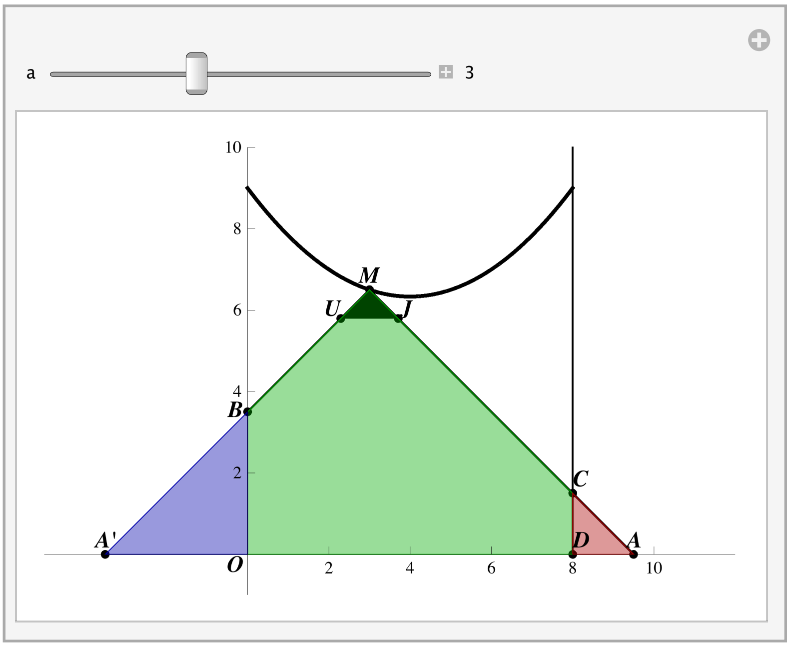
Pour $1 \le x \le 7$, $-1 \le \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \le 1$, donc pour $1 \le x \le 7$, l'abat-jour ne touche pas la rampe.

2). Notons $\mathcal{A}(x)$ l'aire du polygone éclairé $OBMCD$.

Pour $x = 3$, $y = y_M = \frac{13}{2}$.

L'équation de (MJ) est donc $y = x - \frac{7}{2}$ et celle de (MU) est $y = -x + \frac{19}{2}$.

Le point B a pour coordonnées $\left(0; \frac{7}{2}\right)$, le point C a pour coordonnées $\left(8; \frac{3}{2}\right)$ et le point A a pour coordonnées $\left(\frac{19}{2}; 0\right)$.



Notons A' le point d'intersection de la droite (MU) avec l'axe des abscisses. Le point A' a pour coordonnées $\left(-\frac{7}{2}; 0\right)$.
Alors les triangles MAA', DAC et OBA' sont rectangles isocèles en M, D et O.
On a:

• $\mathcal{A}_{MAA'} = \dfrac{MH \times AA'}{2} = \dfrac{\left(\frac{19}{2}+\frac{7}{2}\right)\times\frac{13}{2}}{2} = \dfrac{169}{4}$, avec H projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses (MH est alors la hauteur du triangle MAA' issue de M, car le triangle est isocèle.

• $\mathcal{A}_{DAC} = \dfrac{DA \times DC}{2} = \dfrac{\left(\frac{19}{2}-8\right)^2}{2} = \dfrac{9}{8}$

• $\mathcal{A}_{OBA'} = \dfrac{\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{49}{8}$.

Enfin on remarque que $\mathcal{A}_{OBMCD} = \mathcal{A}_{MAA'} - \mathcal{A}_{DAC} - \mathcal{A}_{OBA'}$ d'où $\mathcal{A}(3) = 35$.
L'aire du polygone éclairé $OBMCD$ correspondant à $x = 3$ est 35 m^2.

3). Déterminons une expression en fonction de x_M de l'aire $\mathcal{A}(x)$.

On sait que $y_M = \dfrac{1}{6}(x_M - 4)^2 + \dfrac{19}{3}$.

Les équations des droites (MU) et (MJ) sont $y = x + (y_M - x_M)$ et $y = -x + (y_M + x_M)$.
Ainsi on obtient $A(x_M + y_M; 0)$, $A'(x_M - y_M; 0)$, $B(0; y_M - x_M)$ et $C(8; y_M + x_M - 8)$.
Remarquons que AA'

On a toujours $\mathcal{A}_{OBMCD} = \mathcal{A}_{MAA'} - \mathcal{A}_{DAC} - \mathcal{A}_{OBA'}$ donc $\mathcal{A}(x_M) = \dfrac{2y_M^2}{2} - \dfrac{(y_M + x_M - 8)^2}{2} - \dfrac{(y_M - x_M)^2}{2}$.

On obtient $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{8x}{3} + 40$ avec $x = x_M$.

On reconnaît une fonction du second degré dont le coefficient des x^2 est positif.

La fonction est donc décroissante sur $\left[1; -\dfrac{-\frac{8}{3}}{2\times\frac{1}{3}}\right] = [1; 4]$ et croissante sur $[4; 7]$.

Elle atteint son maximum en $x = 1$ et en $x = 7$ ($\mathcal{A}(1) = \mathcal{A}(7)$).
L'éclairrage est maximal au bord de la rampe.

Exercice 6: