Préparation aux olympiades de première

Corrections

Problèmes

Exercice 1:

Partie A

1.a). On suppose que $(a\,;b)$ est un couple d'entiers naturels solution de (E) : $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{a\,b}}$.

Ainsi $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a\,b}}$ d'où $\sqrt{b} = \sqrt{a} + 1$ et ainsi $b = \left(\sqrt{a}+1\right)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1$.

b). Comme $b = a + 2\sqrt{a} + 1$ alors $\sqrt{a} = \dfrac{b-a-1}{2}$.

D'où $a = \left(\dfrac{b-a-1}{2}\right)^2$.

Comme $a \in \mathbb{N}^*$, il faut donc $b - a - 1$ pair.

On en déduit que a et b n'ont pas la même parité.

Remarquons de plus que comme $b = a + 2\sqrt{a} + 1$ alors $b > a + 1$ puisque $a > 0$ et donc $b - a - 1 > 0$.

Avec a et b de parité différente, $\dfrac{b-a-1}{2} \in \mathbb{N}^*$.

On pose alors $n = \dfrac{b-a-1}{2}$ et ainsi il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = n^2$.

Alors on obtient $b = n^2 + 2\,n + 1 = (n+1)^2$.

2). L'équation (E) s'écrit alors $\dfrac{1}{\sqrt{n^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2(n+1)^2}}$ d'où $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On obtient donc que n est solution de $\dfrac{n-(n+1)+1}{n(n+1)} = 0$ c'est à dire $\dfrac{0}{n(n+1)} = 0$.

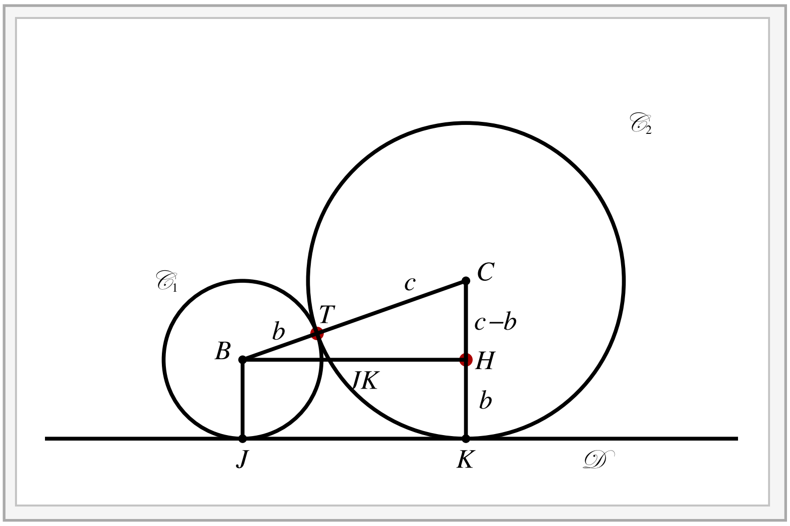
Donc tout entier naturel n non nul convient.

Finalement les couples solutions de l'équation (E) sont les couples $\left(n^2; (n+1)^2\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie B

1). On construit le point H tel que $(B\,H) \perp (C\,K)$ et T le point de tangence des deux cercles comme le montre la figure ci-dessous.

Figure 1:



Comme les 2 cercles sont tangents à la droite (JK), $(BJ) \perp (JK)$ et $(CK) \perp (JK)$ donc le quadrilatère $BJKH$ est un rectangle.
Ainsi on obtient $HK = b$ d'où $HC = c - b$ et $BH = JK$.
De plus comme les deux cercles sont tangents en T alors $BC = BT + TC = b + c$.
De plus le triangle BHC est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore, $BH^2 = CB^2 - CH^2$.
Ainsi $JK^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2$ d'où $KJ^2 = 4bc$.

2). D'après la question précédente, on sait que $JK^2 = 4bc$, $IJ^2 = 4ab$ et $IK^2 = 4ac$.
Or $I \in [JK]$ donc $JK = IJ + IK$.
D'où $\sqrt{bc} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$.

Donc $\sqrt{a}\left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right) = \sqrt{bc}$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$.

Finalement $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

3.a). En choisissant $c = ab$, alors les entiers a, b et c vérifient l'équation (E).
D'après la question **1).**, on obtient donc que pour tout entier n non nul, si $a = n^2$, $b = (n+1)^2$ et $c = n^2(n+1)^2$, les entiers a, b et c vérifient l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ et donc les rayons des trois cercles vérifient la figure 2.

b). 2010 n'est pas un carré parfait donc 2010 ne rentre pas dans les cas précédents.
Il s'agit donc de déterminer 2 entiers b et c tels que $\dfrac{1}{\sqrt{2010}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

On a $\dfrac{1}{\sqrt{2010}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2010}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2010}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\times 2010}} + \dfrac{1}{\sqrt{4\times 2010}}$ donc en posant $b = c = 4\times 2010 = 8040$, on obtient un cas où les 3 rayons sont des entiers et comme alors $\dfrac{1}{\sqrt{2010}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ et que $a < b \leq c$, ce cas convient.

Exercice 2: