Préparation aux olympiades de première

Problèmes

Exercice 1:

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls $(a\,;\,b)$ qui vérifient l'équation: $(E): \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{a\,b}}$.

1). On suppose que $(a\,;\,b)$ est un couple d'entiers naturels solution de (E).

a). Démontrer que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.

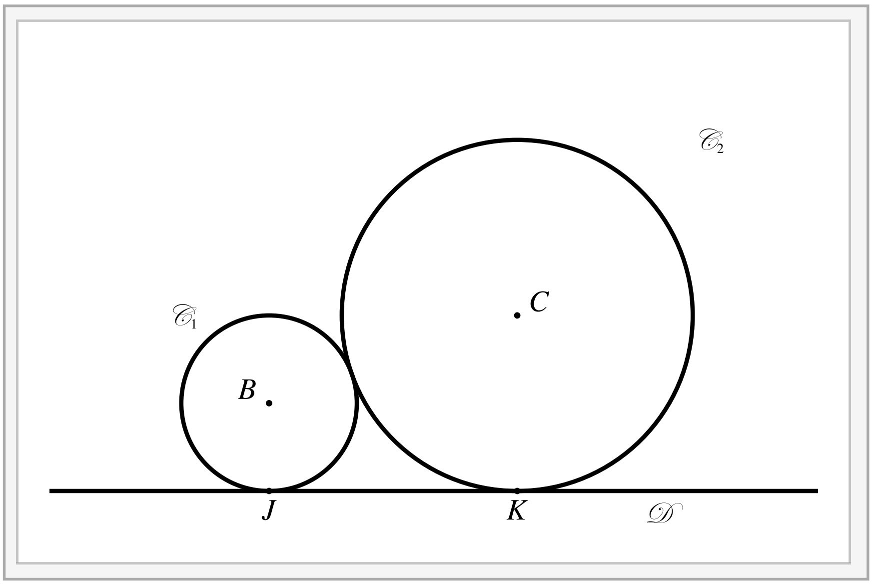
b). En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on ait: $a = n^2$ et $b = (n+1)^2$.

2). Résoudre l'équation (E).

Partie B

1). Deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centres respectifs B et C et de rayons respectifs b et c sont situés du même côté d'une droite $\mathscr{D}$, tangents à cette droite respectivement en J et K, et tangents entre eux (figure 1).

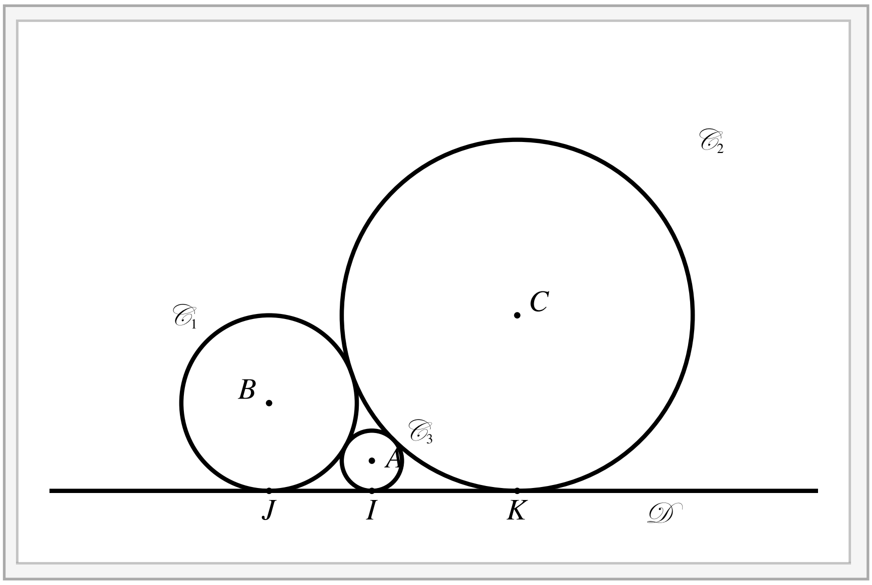
Figure 1:



Démontrer l'égalité $K\,J^2 = 4\,b\,c$.

2). On reprend la figure 1, et l'on rajoute un cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon a, qui est tangent à la droite $\mathscr{D}$ en I, et tangent extérieurement aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ (figure 2).

Figure 2:



Démontrer l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

3). On considère la figure de la question 2.

a). Donner une infinité de cas où les trois rayons sont des entiers, l'un étant le produit des dexu autres.

b). Donner un cas où les trois rayons sont des entiers et où le rayon du petit cercle est égal à 2010.