session 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE MATHÉMATIQUES
CORRECTION

Exercice 1: nombres *digisibles*.

1. Au plus simple: 12. $1 \neq 2$ et 12 est divisible par 1 et par 2 donc il est *digisible*.

On peut aussi aller chercher plus loin… 36 convient aussi.

2. 1236.

3. Soit n un nombre digisible divisible par 5.

a. Les entiers divisibles par 5 ont pour chiffre des unités 0 ou 5.
Donc comme n est digisible, on sait qu'aucun de ses chiffres n'est 0 et comme il doit être divisible par 5, il reste donc que 5 est son chiffre des unités.

b. Si n contient un chiffre pair alors comme il est divisible par ce chiffre, il doit être divisible par 2.
Il faudrait donc que son chiffre des unités soit pair. Or son chiffre des unités est 5.
Donc aucun de ses chiffres ne peut être pair.

c. Dans la liste $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ des chiffres possibles pour n, les chiffres impairs sont $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.
Le nombre n peut donc s'écrire avec au plus 5 chiffres.
Remarquons alors que $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.
Par suite si n s'écrit avec 5 chiffres, alors il s'écrit avec le chiffre 3 donc il doit être divisible par 3 et ainsi la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
Or la somme des 5 chiffres impairs n'est pas un multiple de 3.
Donc n ne peut contenir 5 chiffres.
Le nombre n admet au plus 4 chiffres.

d. On sait que le chiffre des unités de n est 5: n s'écrit donc $\overline{abc5}$ avec a, b et c des chiffres de l'ensemble $\{1; 3; 7; 9\}$.
Le plus grand devrait avoir pour chiffre des milliers 9. Essayons donc $n = \overline{9bc5}$.
Remarquons que n doit alors être divisble par 9 donc la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
Si un chiffre est 7, la somme des chiffres est alors $9 + 7 + 5 + \left\{\begin{array}{c} 1 \\ \text{ou} \\ 3 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{c} 22 \\ \text{ou} \\ 24 \end{array}\right.$ or 22 et 24 ne sont pas des multiples de 9 donc aucun chiffre ne peut être 7.
Avec 9 pour chiffre des milliers, il reste donc 9315 ou 9135 et de plus $9 + 1 + 3 + 5 = 18$ donc les deux nombres sont divisibles par 9 et par conséquent par 3.
Comme tout entier est divisible par 1, alors 9315 et 9135 sont digisibles.
Le plus grand entier digisible divisible par 5 est donc 9315.

4. Soit n un entier digisible.

a. n s'écrit avec au plus 9 chiffres.
Mais d'après la question précédente, il ne peut contenir 5 puisqu'un entier digisible contenant 5 est divisible par 5

et donc n'a que 4 chiffres.
Donc n s'écrit avec au plus 8 chiffres parmi $\{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$.
Mais $1+2+3+4+6+7+8+9=40$ et 40 n'est pas divisible par 3 ni par 9. donc l'entier n ne peut pas s'écrire avec les 8 chiffres 1,2,3,4,6,7,8,9.
Il s'écrit donc avec au plus 7 chiffres.

b. On suppose que n s'écrit avec 7 chiffres dont un 9.
Il reste donc 6 chiffres à choisir parmi $\{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\}$.
Comme n s'écrit avec un 9, alors la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
Or:

- $2+3+4+6+7+8+9=39$ et 39 n'est pas divisible par 9;
- $1+3+4+6+7+8+9=38$ et 38 n'est pas divisible par 9;
- $1+2+4+6+7+8+9=37$ et 37 n'est pas divisible par 9;
- $1+2+3+6+7+8+9=36$ et 36 est divisible par 9;
- $1+2+3+4+7+8+9=34$ et 34 n'est pas divisible par 9;
- $1+2+3+4+6+8+9=33$ et 33 n'est pas divisible par 9;
- $1+2+3+4+6+7+9=32$ et 32 n'est pas divisible par 9.

Il reste donc une seule possibilité. Le nombre n s'écrit avec les chiffres 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9.

c. On cherche donc le plus grand entier n de 7 chiffres s'écrivant avec les chiffres 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9.
On sait que n est divisible par 3 et 9.
De plus il doit être pair. Son chiffre des unités est donc pair: 2; 6 ou 8.
Pour que n soit le plus grand possible, on place 2 comme chiffres des unités.
Il est donc divisible par 6.
Ainsi $n = 9-----2$.
On essaye dans l'ordre décroissant.

- 9 876 312 non divisible par 7
- 9 876 132 non divisible par 8
- 9 873 612 non divisible par 8
- 9 873 162 non divisible par 7
- 9 871 632 non divisible par 7
- 9 871 362 non divisible par 7
- 9 867 312 est divisible par 7 et par 8.

Finalement 9 867 312 est le plus grand entier digisible.

Exercice 2:

Partie I

1. L'ensemble des points équidistants des points O et A est la médiatrice du segment $[OA]$.
Donc l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A est le segment constitué des points de la médiatrice à l'intérieur du disque.
On note $[MN]$ ce segment.

2. La médiatrice du segment $[OA]$ partage le plan en 2 demi-plans: le demi-plan des points dont la distance à O est inférieure à celle de A (les points plus proche de O que de A) et le demi-plan des points dont la distance à O est supérieure à celle de A (les points plus proche de A que de O).
Donc l'ensemble des points du disque plus proche de O que de A est l'ensemble des points du disque du côté de O par rapport à la médiatrice du segment $[OA]$.
On note $\mathcal{D}$ ce domaine.

3. La probabilité qu'un point M du disque soit plus proche de O que de A est donnée par

$$\frac{\text{aire de l' ensemble des points du disque plus proche de } O}{\text{aire totale du disque}}.$$

Déterminons l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

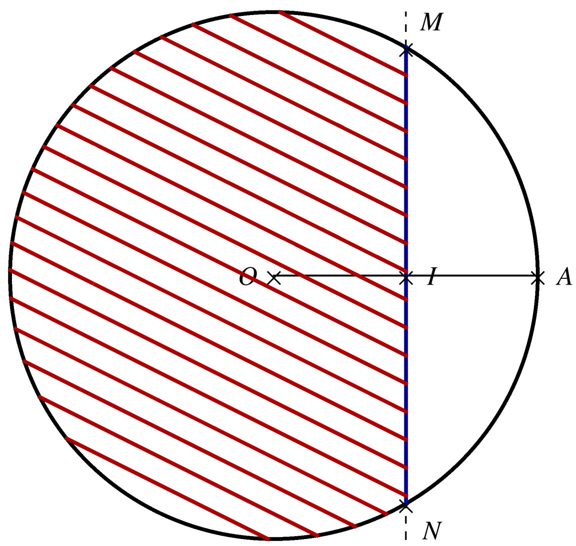
On note I le milieu de $[OA]$.

Comme $OM = AM$ et $OM = OA$, le triangle OAM est équilatéral. Ainsi l'aire non hachurée incluse dans le secteur angulaire AOM est donnée par $\dfrac{\pi OA^2}{6} - \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} OA \times \frac{OA}{2}}{2} = \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right) OA^2$.

Finalement l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est donnée par $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \pi OA^2 - 2 \times \left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right) OA^2 = \left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) OA^2$.

On en déduit que la probabilité de choisir un point M du disque soit plus proche de O que de A est donnée par $\dfrac{\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) OA^2}{\pi OA^2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$.

Figure:



Partie II

1. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles donc l'ensemble des points équidistants des droites (AB) et (BC) est la droite (d) parallèle aux droites (AD) et (BC) telle que la distance de (d) à (AD) et (BC) soit égale à la moitié de la distance de (AD) à (BC). En l'occurence ici, c'est donc la parallèle aux droites (AD) et (BC) passant par O et les millieux des segments $[AB]$ et $[DC]$.

Le rectangle est donc partagé en deux rectangles de même aire.

La probabilité de choisir un point M plus proche de $[AD]$ que de $[BC]$ est donc égale à $\dfrac{1}{2}$.

2.a. L'ensemble des points équidistants des deux côtés d'un angle est la bissectrice de cet angle.

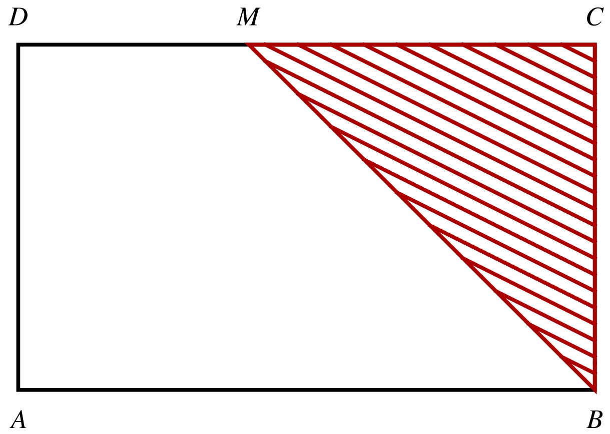
Donc l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés $[AB]$ et $[BC]$ est le segment $[BM]$ où M est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $A\hat{B}C$ et du côté $[CD]$.

On peut assurer que ce point existe puisque $AB > BC$.

2.b. La bissectrice partage donc le secteur du plan délimité par les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ en deux secteurs: celui contenant A, des points plus proches de $[BA)$, celui contenant $[BC)$, des points plus proches de $[BC)$.

La région cherchée est l'intersection du rectangle avec le demi-plan défini par la bissectrice de l'angle $A\hat{B}C$ contenant C.

On obtient la figure:



c. On calcule l'aire du domaine hachuré.

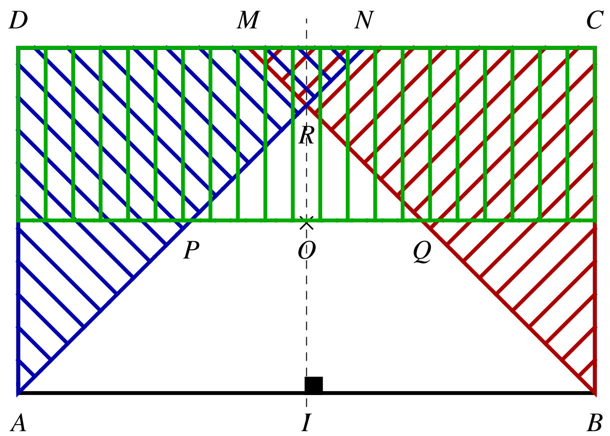
Comme $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ alors la dissectrice de l'angle $A\hat{B}C$ partage l'angle $A\hat{B}C$ en 2 angles égaux à $\frac{\pi}{4}$.

Le triangle BCM est donc isocèle rectangle en B. L'aire hachurée est donc égale à $\frac{12^2}{2}$.

La probabilité de choisir un point M du rectangle plus proche de $[BC]$ que de $[BA]$ est donc égale à $\frac{\frac{12^2}{2}}{12\times 20} = \frac{3}{10}$.

3. Le point M est plus proche du côté $[AB]$ que du côté $[BC]$ s'il n'est pas dans la partie hachurée à la question précédente.
Le point M est plus proche du côté $[AB]$ que du côté $[AD]$ s'il n'est pas dans la partie hachurée en bleu, c'est à dire la zone du rectangle délimitée par la bissectrice de l'angle $B\hat{A}D$ contenant D.
Le point M est plus proche du côté $[AB]$ que du côté $[DC]$ s'il n'est pas dans la partie hachurée en vert, c'est à dire la moitié du rectangle délimitée par la parallèle aux droites (AB) et (DC) passant par O, ie la médiatrice des segments $[AD]$ et $[BC]$.

On obtient la figure:



Finalement le point M est plus proche du côté $[AB]$ s'il appartient à la partie du rectangle non hachurée sur la figure ci-dessus.
Calculons son aire.

Les points sont ceux définis sur le graphique.

Comme les droites (AN) et (BM) sont les bissectrices des angles droits $D\hat{A}B$ et $A\hat{B}C$ alors on a

$N\widehat{A}B = A\widehat{B}M = \dfrac{\pi}{4}$.
Par suite le triangle ABR est isocèle rectangle en R.
On peut assurer que R est sur l'axe de symétrie (IO) du rectangle $ABCD$, ie la médiatrice des segments $[AB]$ et $[DC]$.
En effet le point R est équidistant des côtés $[AD]$ et $[AB]$ et des côtés $[BC]$ et $[AB]$ et donc il est équidistant des côtés $[AD]$ et $[BC]$ donc appartient à la médiatrice des segments $[AB]$ et $[DC]$ (cf question **1.**).

Le triangle RIA rectangle en I est donc isocèle en I :($R\widehat{A}I = \dfrac{\pi}{4}$) on a donc $RI = AI = 10$ et comme $OI = 6$ alors $RO = 4$.

On en déduit $\mathcal{A}_{RAB} = \dfrac{20\times 10}{2} = 100$.

Le triangle POR est rectangle isocèle en O puisque $R\widehat{P}O = R\widehat{O}I = \dfrac{\pi}{4}$ (les deux angles sont correspondants car $(PQ)\,//\,(AB)$).

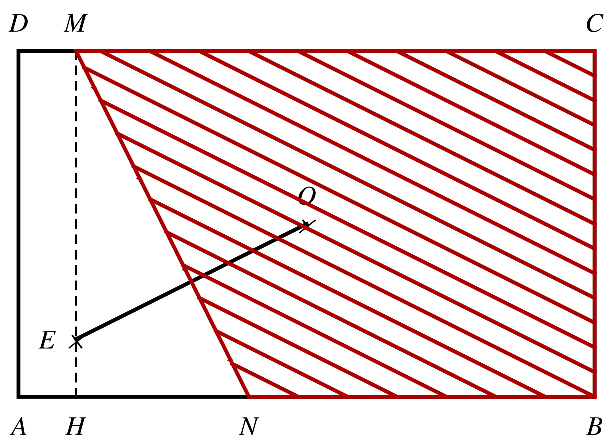
On obtient donc $PO = RO = 4$ d'où $\mathcal{A}_{RPQ} = \dfrac{4\times 8}{2} = 16$.

Finalement l'aire du trapèze $ABQP$ est égale à $100 - 16 = 84$ et la probabilité de choisir un point M du rectangle plus proche de $[AB]$ que des 3 autres côtés $[BC]$, $[DC]$ et $[AD]$ est égale à $\dfrac{84}{240} = \dfrac{7}{20}$.

4. Le point M est plus proche du point O que du point E s'il est un point de l'intersection du rectangle et du demi-plan défini par la médiatrice du segment $[OE]$ contenant O.
Calculons l'aire de ce domaine du plan.

Considérons un repère orhonormé d'origine A d'axes (OB) et (OD), d'unité 1 cm.

Dans ce repère la droite (OE) a pour équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ donc la médiatrice qui est la droite orthogonale à la droite (OE) passant par le milieu $I(6;4)$ a pour équation $y = -2x + 16$.
Les points M et N d'intersections de cette médiatrice avec les côtés $[DC]$ et $[AB]$ du rectangle sont respectivement les points de cette droite d'ordonnées 12 et 0.
On obtient $M(2;12)$ et $N(8;0)$.



Le quadrilatère $ANMD$ est donc un trapèze de base $DM = 2$ et $AN = 8$ et de hauteur $AD = 12$.

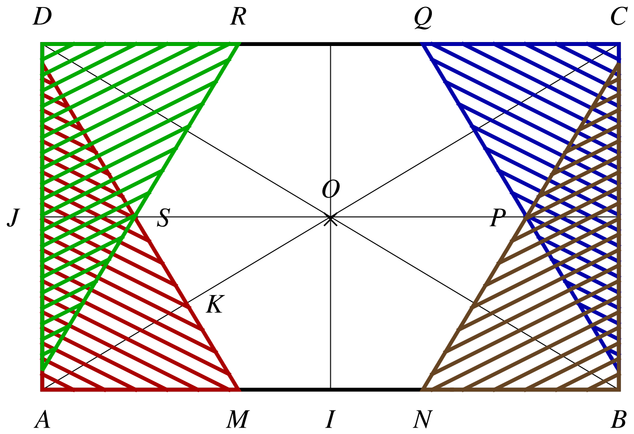
Son aire est donc $\dfrac{(2+8)\times 12}{2} = 60$.

L'aire de la partie hachurée est donc $12\times 20 - 60 = 180$.

La probabilité de choisir un point M du rectangle plus proche de O que de E est donc égale à $\dfrac{180}{240} = \dfrac{3}{4}$.

5. Un point M du rectangle est plus proche de O que du sommet A du rectangle s'il appartient à l'intersection du demi-plan défini par la médiatrice du segment $[OA]$, contenant O et à l'intérieur du rectangle.
Identiquement pour les 3 autres sommets.
Donc un point M est plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D du rectangle s'il appartient à l'intersection des 4 zones ainsi définies.

On obtient la figure:
Pour des raisons de lecture, on a hachuré les zones du rectangle auxquelles ne doit pas appartenir le point M.



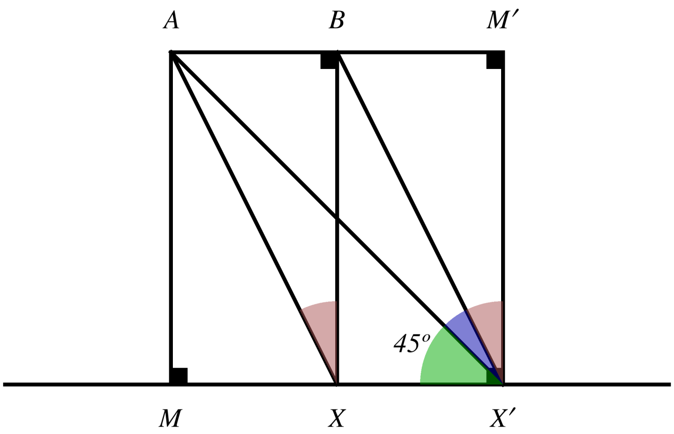
Il est clair, pour des raisons de symétrie que l'aire de l'hexagone $MNPQRS$ est égale à 4 fois l'aire du trapèze $MIOS$.
Le milieu K du segment $[OA]$ est le centre du rectangle $AIOJ$.
Le point K est donc centre de symétrie du rectangle.
L'image du côté $[AI]$ par la symétrie de centre K est le segment $[OJ]$ et comme $M \in [AI]$ l'image du point M par cette symétrie est le point d'intersection de la droite (MK) et du segment $[OJ]$: c'est donc S.
Par suite l'image du trapèze $MIOS$ par la symétrie de centre K est le trapèze $SJAM$. Les trapèzes $MIOS$ et $SJAM$ ont donc la même aire et comme ils partagent le rectangle $AIOJ$ en deux, pour aire la moitié du rectangle $AIOJ$.
De même pour les quatre autres trapèzes donc l'aire de la partie non hachurée du plan est égale à l'aire de la partie hachurée et donc à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$.

La probabilité de choisir un point M plus proche de O que des 4 sommets du rectangle $ABCD$ est donc égale à $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3:

1. La vitesse du train est 90 km/h c'est à dire $\dfrac{90\,000}{3600} = 25$ m/s donc il faut 4 secondes au train pour parcourir 100 m.

2. On a la figure suivante:



En considérant le point M projeté orthogonal du point A sur la voie ferrée (XX'), on a clairement $XX' = XM = AB = 100$ et $AM = BX = 200$.

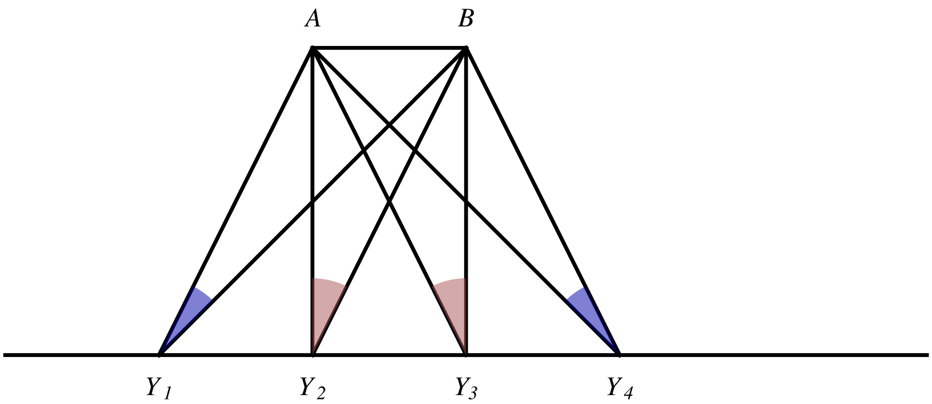
Le triangle AMX' est isocèle rectangle en M donc $M\hat{X'}A = \dfrac{\pi}{4}$.

On considère aussi le point M' projeté orthogonal du point X' sur la droite (AB).

Alors le triangle $BM'X'$ a les mêmes dimensions que le triangle ABX. On en déduit donc que $B\hat{X'}M' = A\hat{X}B$.

On obtient ainsi $\dfrac{\pi}{2} = XX'M' = X\hat{X'}A + A\hat{X'}B + B\hat{X'}M' = \dfrac{\pi}{4} + A\hat{X'}B + A\hat{X}B$ d'où $A\hat{X'}B + A\hat{X}B = \dfrac{\pi}{4} = 45\,°$.

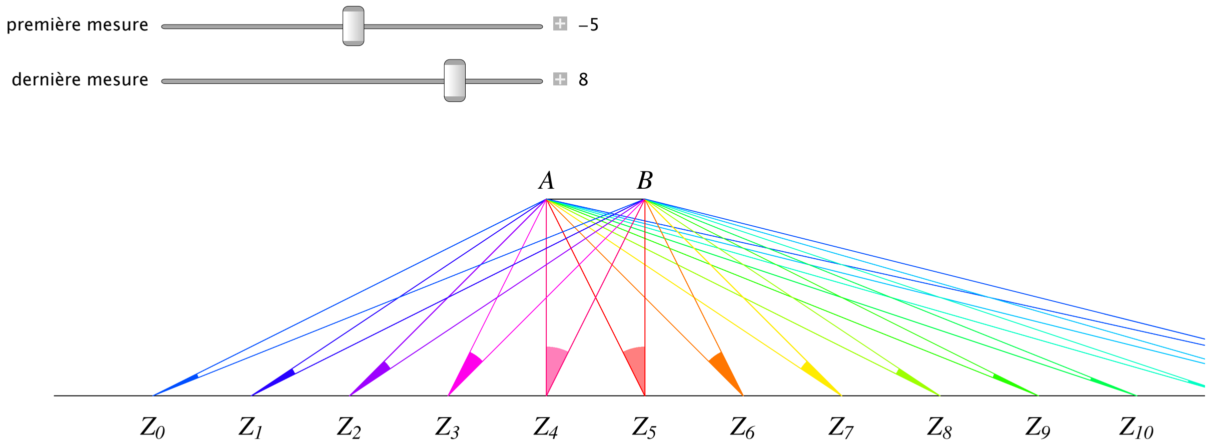
3. Comme le train avance de 100 m pendant 4 s, alors Yasmina a commencé ses mesures 200 m avant *B*.
On a la figure:



Il est clair que par symétrie par rapport à la méidatrice de $[AB]$, $A\hat{Y}_2B = A\hat{Y}_3B$ et $A\hat{Y}_1B = A\hat{Y}_4B$.

Comme d'après la question **2.**, $A\hat{Y}_3B + A\hat{Y}_4B = 45\,°$ alors $A\hat{Y}_1B + A\hat{Y}_2B + A\hat{Y}_3B + A\hat{Y}_4B = 90\,°$.

4. On obtient la figure:

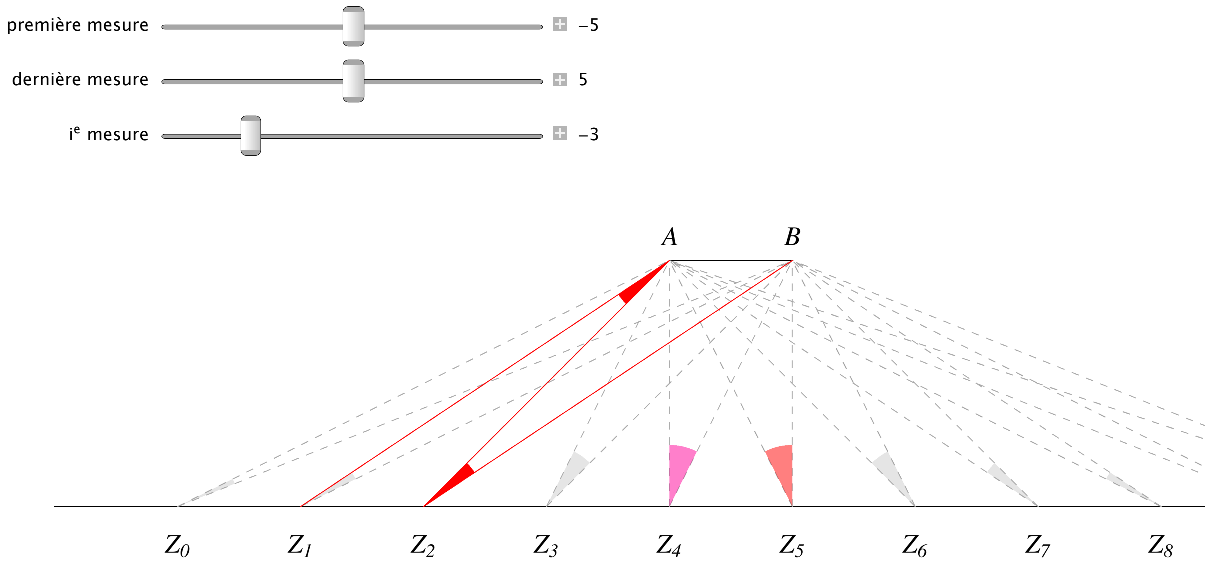


Comme $Z_i Z_{i+1} = AB$ pour tout entier i, alors $(Z_i A) \,//\, (Z_{i+1} B)$.

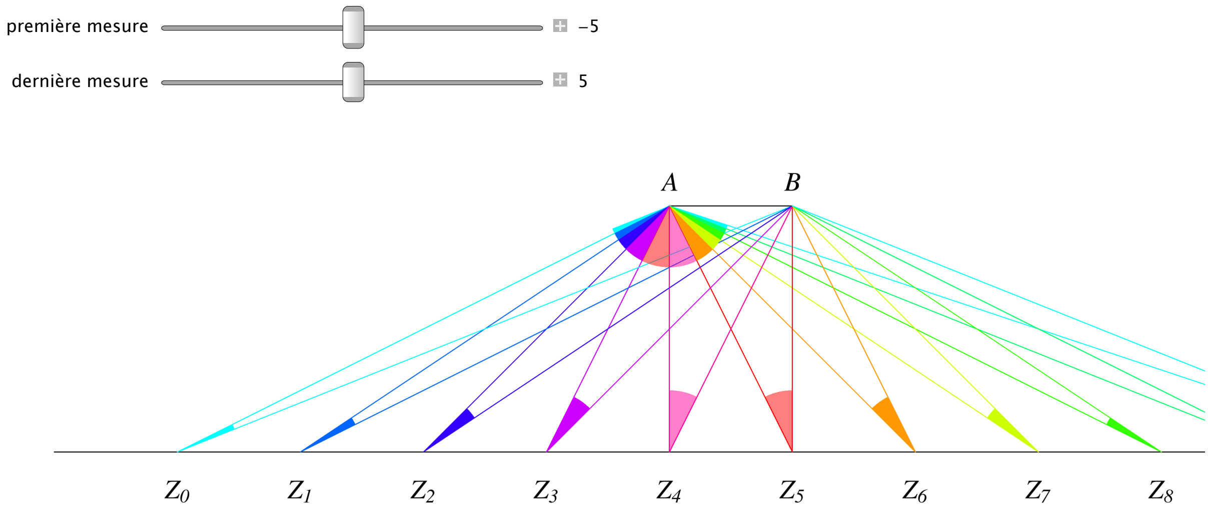
Ainsi les angles $A\hat{Z_i}B$ et $Z_i\hat{A}Z_{i+1}$ sont alternes-internes.

On a les figures:

En manipulant la i^e mesure, on peut observer les angles alternes-internes concernés:



On observe ci-dessous, le report des angles en angles adjacents de sommet A:



Par suite $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A\hat{Z}_i B = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i\hat{A}Z_{i+1} = Z_0\hat{A}Z_n$ car les angles $Z_i\hat{A}Z_{i+1}$ sont adjacents.

Comme tous les Z_i appartiennent à la voie ferrée, alors $Z_0\hat{B}Z_n \leq 180\,°$: l'angle formé par 2 points de la voie ferrée et le point A ne pourra jamais être égal à l'angle plat.

Exercice 4:

1. Le dé d'Antoine a 3 faces numérotées 6 sur 4 donc la probabilité qu'Antoine obtienne un nombre supérieur ou égal à 6 est $\frac{3}{4}$.
Le dé de Baptiste n'a aucune face numérotée avec un nombre supérieur ou égal à 6, donc la probabilité que Baptiste obtienne un nombre supérieur ou égal à 6 est 0.
Le dé de Cyril a une seule face numérotée avec un nombre supérieur ou égal à 6, donc la probabilité que Cyril obtienne un nombre supérieur ou égal à 6 est $\frac{1}{4}$.
Le dé de Diane a deux faces numérotées avec un nombre supérieur ou égal à 6, donc la probabilité que Diane obtienne un nombre supérieur ou égal à 6 est $\frac{1}{2}$.
On a $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ donc c'est Antoine qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6.

2. On note $X \leftrightarrow Y$ l'événement «le joueur X gagne contre le joueur Y» avec X, Y appartenant à $\{A; B; C; D\}$, et $X \neq Y$.

2.a. Si Antoine obtient 6 au lancer de son dé alors il gagne puisque Baptiste ne peut pas obtenir plus que 5.
Par contre si Antoine obtient 1 avec son dé alors, c'est Baptiste qui gagne puisque toutes les faces du dé de Baptiste porte un nombre > 1.
Donc Antoine gagne contre Baptiste si Antoine obtient 6 avec son dé donc $p(A \leftrightarrow B) = \frac{3}{4}$.

b. On a $p(B \leftrightarrow C) = \frac{3}{4}$: en effet Cyril ne gagne que si son dé lui donne 8 puisque sinon Baptiste obtient à coup sur un numéro supérieur au numéro 3 obtenu par Cyril.

Diane gagne contre Cyril dans le cas où Diane obtient 7 et Cyril 3, sinon Diane perd.

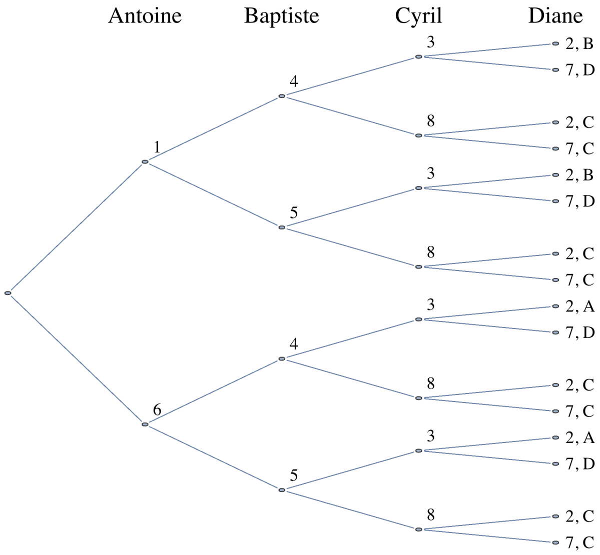
Donc $p(C \leftrightarrow D) = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

Antoine gagne contre Diane s'il obtient 6 et Diane obtient 2.

Donc $p(D \leftrightarrow A) = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

3. On note $p(X)$ la probabilité de l'événement «le joueur X gagne» avec $X \in \{A; B; C; D\}$.

a. Représentons la situation par un arbre de probabilités:



On a porté au bour des branches correspondantes les cas où Baptiste gagne.

On observe que Baptiste gagne dans 2 cas seulement donc la probabilité que Baptiste gagne est donnée par $p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

b. Calculons la probabilité que chaque joueur a de gagner.

On a:

- $p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{18}{64} = \frac{9}{32}$

- On peut remarquer que dans le cas où Cyril obtient le nombre 3, il perd systématiquement (contre Baptiste par exemple) et s'il fait 8, il gagne systématiquement.

  Ainsi on obtient $p(C) = \frac{1}{4} = \frac{8}{32}$.

- $p(D) = 1 - (p(A) + p(B) + p(C)) = 1 - \left(\frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{4}\right) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} = \frac{12}{32}$.

C'est donc Diane qui a le plus de chance

4.a. On suppose $a_2 \leq b_2$.

Ainsi on a $a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$.

Par suite Antoine perd, sûrement, s'il obtient a_1 ou a_2 et si Baptiste obtient b_2, b_3 ou b_4.

On a donc p(«Antoine perd contre Baptiste») $\geq p$(«Antoine obtient a_1 ou a_2» $\bigcap$ «Baptiste obtient b_2, b_3 ou b_4») .

Comme les événements «Antoine obtient a_1 ou a_2» et «Baptiste obtient b_2, b_3 ou b_4» sont indépendants, p(«Antoine obtient a_1 ou a_2» $\bigcap$ «Baptiste obtient b_2, b_3 ou b_4») = .

p(«Antoine obtient a_1 ou a_2») $\times$ p(«Baptiste obtient b_1, b_2 ou b_3»)

D'où p(«Antoine perd contre Baptiste») $\geq \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ c'est à dire p(«Antoine perd contre Baptiste») $\geq \frac{3}{8}$ et donc comme p(«Antoine gagne contre Baptiste») = 1 − p(«Antoine perd contre Baptiste»), on obtient p(«Antoine gagne contre Baptiste») $\leq 1-\frac{3}{8}$ d'où p(«Antoine gagne contre Baptiste») $\leq \frac{5}{8}$.

b. D'après la question précédente, si $a_2 \leq b_2$, p(«Antoine gagne contre Baptiste») $\leq \frac{5}{8}$.

Par contraposée, p(«Antoine gagne contre Baptiste») $> \frac{5}{8}$ si $a_2 > b_2$.

De même, $p(B \leftrightarrow C) > \frac{5}{8}$ si $b_2 > c_2$, puis $p(C \leftrightarrow D) > \frac{5}{8}$ si $c_2 > d_2$ et $p(D \leftrightarrow A) > \frac{5}{8}$ si $d_2 > a_2$.

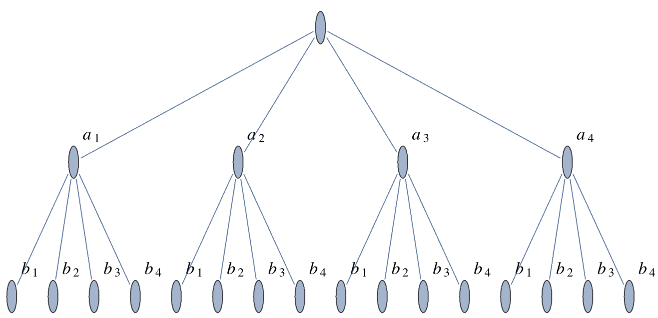
Par suite pour obtenir $\begin{cases} p(A \leftrightarrow B) > \frac{5}{8} \\ p(B \leftrightarrow C) > \frac{5}{8} \\ p(C \leftrightarrow D) > \frac{5}{8} \\ p(D \leftrightarrow A) > \frac{5}{8} \end{cases}$, il faut $a_2 < d_2 < c_2 < b_2 < a_2$: absurde.

Donc il n'existe pas de dés tétraédriques tels que $\begin{cases} p(A \leftrightarrow B) > \frac{5}{8} \\ p(B \leftrightarrow C) > \frac{5}{8} \\ p(C \leftrightarrow D) > \frac{5}{8} \\ p(D \leftrightarrow A) > \frac{5}{8} \end{cases}$.

c. Un joueur $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ gagne un joueur $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$ avec la probabilité $\frac{5}{8}$ si les valeurs $(a_1; a_2; a_3; a_4)$ et $(b_1; b_2; b_3; b_4)$ sont dans l'une des configurations suivantes:

- cas 1: $a_1 < b_1 \leq b_2 < a_2 < b_3 \leq b_4 < a_3 \leq a_4$
- cas 2: $a_1 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 < a_2 \leq a_3 < b_4 < a_4$
- cas 3: $b_1 < a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_3 \leq b_4 < a_3 \leq a_4$ (cas de Diane contre Antoine)
- cas 4: $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 < b_4 < a_4$
- cas 5: $b_1 < a_1 < b_2 \leq b_3 < a_2 \leq a_3 \leq a_4 < b_4$
- cas 6: $b_1 \leq b_2 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 < b_3 \leq b_4 < a_4$ (cas de Cyril contre Diane)
- cas 7: $b_1 \leq b_2 < a_1 \leq a_2 < b_3 < a_3 \leq a_4 < b_4$.

En effet, on a l'arbre de probabilités:



Chaque branche a pour probabilité $\frac{1}{16}$ et donc pour que $p(A \leftrightarrow B) = \frac{5}{8}$, il faut 10 branches gagnantes.
Comme $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ et $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq b_4$, si par exemple $a_1 \geq b_2$ alors a fortiori les branches $a_2 \leftrightarrow b_1$ et $a_2 \leftrightarrow b_2$ sont aussi gagnantes.
Par suite il faut déterminer les différentes sommes de 4 nombres pris parmi $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ dans l'ordre croissant égale à 10.
On obtient:

cas gagnants pour a_1	cas gagnants pour a_2	cas gagnants pour a_3	cas gagnants pour a_4
0	2	4	4
0	3	3	4
1	1	4	4
1	2	3	4
1	3	3	3
2	2	2	4
2	2	3	3

On ordonne ainsi les a_i et le b_i de manière à obtenir le nombre de cas gagnants correspondants.
On obtient les cas cités précédemment.

Il reste à choisir des entiers $a_1, \ldots, d_4$ permettant de réaliser 4 dispositions compatibles.

On choisit alors les entiers $a_1, \ldots, d_4$ tels que:
$b_1 < a_1 < d_1 \leq d_2 < c_1 \leq c_2 \leq c_3 < b_2 \leq b_3 < a_2 \leq a_3 \leq a_4 < d_3 \leq d_4 < c_4 < b_4$.
On a alors:

- $b_1 < a_1 < b_2 \leq b_3 < a_2 \leq a_3 \leq a_4 < b_4$ donc $p(A \leftrightarrow B) = \frac{5}{8}$ (cas 5)
- $b_1 < c_1 \leq c_2 \leq c_3 < b_2 \leq b_3 < c_4 < b_4$ donc $p(B \leftrightarrow C) = \frac{5}{8}$ (cas 2)
- $d_1 \leq d_2 < c_1 \leq c_2 \leq c_3 < d_3 \leq d_4 < c_4$ donc $p(C \leftrightarrow D) = \frac{5}{8}$ (cas 6)
- $a_1 < d_1 \leq d_2 < a_2 \leq a_3 \leq a_4 < d_3 \leq d_4$ donc $p(D \leftrightarrow A) = \frac{5}{8}$ (cas 3).

Par exemple comme $1 < 2 < 3 \leq 3 < 4 \leq 4$, $4 < 5 \leq 5 < 6 \leq 6 \leq 6 < 7 \leq 7 < 8 < 9$, avec $A(2; 6; 6; 6)$, $B(1; 5; 5; 9)$, $C(4; 4; 4; 8)$ et $D(3; 3; 7; 7)$, on a 4 dés de telle sorte qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste contre Cyril, Cyril contre Diane et diane contre Antoine, chacun avec la probabilité $\frac{5}{8}$.

Remarque: il y a probablement d'autres choix possibles.

Autre méthode:

Les calculs de la question **2.** on déjà permis d'obtenir deux cas où la probabilité de gagner pour le joueur *"A"* est de $\frac{5}{8}$.

On peut donc penser à "arranger" les dés de telle sorte que $p(A \leftrightarrow B) = \frac{5}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$ et $p(B \leftrightarrow C) = \frac{5}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$(il faut donc enlever 1 cas gagnant), sans changer les matchs suivants.
Essayons de ne changer que celui de Baptiste pour éviter le risque de changer les autres probabilités.

• Pour $p(A \leftrightarrow B)$:
Si $b_1 > a_1 = 1$, alors Baptiste gagne toutes les parties où a_1 sort.
Il reste 12 possibilités. Sans changer le dé d'Antoine, comme $a_2 = a_3 = a_6 = 6$, il n'y a aucun moyen de transformer le dé de Baptiste pour que seules 2 issues ne soient plus gagnantes.

Choisissons donc $b_1 < 1$ d'où $b_1 = 0$.

Si aucun des numéros de Baptiste n'est supérieur à 6, alors Antoine gagne avec une probabilité de $\frac{13}{16}$.

Il reste donc à éliminer 3 cas: remarquons alors que si $b_4 > 6$, on élimine 3 cas gagnants pour Antoine.

Donc un dé pour Baptiiste de telle sorte que $p(A \hookrightarrow B) = \frac{5}{8}$ est $(0; 4; 5; b_4)$ avec $b_4 > 6$.

• Pour $p(B \hookrightarrow C)$:
Avec un dé $(0; 4; 5; b_4)$, Baptiste gagne sûrement Cyril dans les cas où Baptiste obtient 4, 5 ou b_4 et Cyril 3 et perd sûrement s'il obtient 0 ou s'il obtient 4 ou 5 et Cyril 8.
Cela fait au moins 9 cas sur 16 gagnants et 6 cas perdants.
Le seul match restant est le match b_4 contre 8.
Donc si l'on veut Baptiste gagnant, il suffit de choisir $b_4 > 8$ (ce qui ne change rien pour le match Antoine-Baptiste puisque $6 < 8$).
On obtient alors 10 cas gagnants pour Baptiste.

Finalement donner le dé $(0; 4; 5; 9)$ à Baptiste et garder les autres dés proposés par l'énoncé permet de réaliser qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste contre Cyril, Cyril contre Diane et diane contre Antoine, chacun avec la probabilité $\frac{5}{8}$.
Il existe donc des dés tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste contre Cyril, Cyril contre Diane et diane contre Antoine, chacun avec la probabilité $\frac{5}{8}$.
On retrouve ici une proposition assez proche de celle déterminée en amont.