session 2013

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Solutions

Exercice 1:

1.(a). On a $3+6+4=13$ et $364=13\times 28$ donc 13 divise 364. Donc 364 est un nombre de Harshad.

(b). Tout entier de 1 chiffre est divisible par lui-même.
De plus la somme des chiffres de 10 est 1 et 1 divise 10 donc 10 est un nombre de Harshad.
L'entier suivant est 11. La somme de ses chiffres est 2 et 2 ne divise pas 11.
Donc 11 est le plus entier qui n'est pas un nombre de Harshad.

2.(a). 1000 convient clairement.

(b). 10^{n-1} est un entier de n chiffres dont la somme est égale à 1. Alors comme 1 divise tout entier naturel, 10^{n-1} est un nombre de Harshad.

3.(a). On a:

- $1+1+0=2$ et 2 divise 110 donc 110 est un nombre de Harshad.
- $1+1+1=3$ et 3 divise 111 justement puisque la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- $1+1+2=4$ et $112=4\times 28$ donc 112 est un nombre de Harshad.

Par suite 110, 111 et 112 sont 3 entiers de Harshad consécutifs.

(b). Remarquons qu'en insérant le chiffre 0 on ne change pas la somme des chiffres.
1010 est pair donc divisible par 2, 1011 est clairement divisible par 3 et $1012=4\times 253$ est divisible par 4.
Ainsi 1010, 1011 et 1012 sont trois nombres de Harshad de 4 chiffres consécutifs.

(c). Soit n un entier, $n\geq 2$.
On note $a_n=10^n+10$, $b_n=10^n+11$ et $c_n=10^n+12$.
Les entiers a_n, b_n et c_n sont des entiers consécutifs de $(n+1)$ chiffres.
De plus:

- la somme des chiffres de a_n est 2 et a_n est pair donc divisible par 2;
- la somme des chiffres de b_n est 3 et donc b_n est divisible par 3;
- la somme des chiffres de c_n est 4 et $c_n=4\times 25\times 10^{n-2}+4\times 3$ donc $c_n=4\left(25\times 10^{n-2}+3\right)$ donc c_n est divisible par 4.

Par suite les entiers a_n, b_n et c_n sont des nombres consécutifs de Harshad pour tout entier n.
Il existe donc une infinité de listes de 3 nombres de Harshad consécutifs.

4.(a). On a $A=30\times 31\times 32\times 33=982\,080$ donc la somme de ses chiffres est 27.

(b). On a $9\,820\,808\,030=A\times 100+30$ donc la somme des chiffres de $9\,820\,808\,030$ est 30.
De plus $A\times 100+30=30\times 31\times 32\times 33\times 100+30=30\,(31\times 32\times 33\times 100+1)$ et donc $9\,820\,808\,030$ est divisible par 30.
Ainsi $9\,820\,808\,030$ est un entier de Harshad.
De même:

- $9\,820\,808\,031=A\times 100+31=31\times(30\times 32\times 33\times 100+1)$ donc 31 divise $9\,820\,808\,031$ et la somme de ses chiffres est 31.
- $9\,820\,808\,032=A\times 100+32=32\times(30\times 31\times 33\times 100+1)$ donc 32 divise $9\,820\,808\,032$ et la somme de

ses chiffres est 32.

- $9\,820\,808\,033 = A\times 100 + 33 = 33\times(30\times 31\times 32\times 100 + 1)$ donc 33 divise $9\,820\,808\,033$ et la somme de ses chiffres est 33.

Finalement $9\,820\,808\,030$, $9\,820\,808\,031$, $9\,820\,808\,032$ et $9\,820\,808\,033$ sont 4 nombres de Harshad consécutifs.

(c). On considère pour tout entier $n \geq 2$, les entiers $A\times 10^n + 30$, $A\times 10^n + 31$, $A\times 10^n + 32$ et $A\times 10^n + 33$.
Ces 4 entiers sont consécutifs.
Les sommes de leurs chiffres sont respectivement 30, 31, 32 et 32 (on a ajouté seulement des 0 par rapport au cas précédent).
Enfin, on a $A\times 10^n + 30 = 30\times(31\times 32\times 33\times 10^n + 1)$, $A\times 10^n + 31 = 31\times(30\times 32\times 33\times 10^n + 1)$,
$A\times 10^n + 32 = 32\times(30\times 31\times 33\times 10^n + 1)$ et $A\times 10^n + 33 = 33\times(30\times 31\times 32\times 10^n + 1)$.
Donc ces 4 entiers forment une liste de 4 nombres de Harshad consécutifs.
Il existe donc une infinité de listes de 4 nombres de Harshad consécutifs.

5.(a). On pose $B = 30\times 31\times 32\times 33\times 34 = 33\,390\,720$.
La somme des chiffres de B est 27.
On considère alors les 5 entiers consécutifs $B\times 100 + 30$, $B\times 100 + 31$, $B\times 100 + 32$, $B\times 100 + 33$ et $B\times 100 + 34$.
Les sommes des chiffres de ces 5 entiers sont respectivement 30, 31, 32, 33 et 34.
De plus on a:

- $B\times 100 + 30 = 30\times(31\times 32\times 33\times 34\times 100 + 1)$;
- $B\times 100 + 31 = 31\times(30\times 32\times 33\times 34\times 100 + 1)$;
- $B\times 100 + 32 = 32\times(30\times 31\times 33\times 34\times 100 + 1)$;
- $B\times 100 + 33 = 33\times(30\times 31\times 32\times 34\times 100 + 1)$;
- $B\times 100 + 34 = 34\times(30\times 31\times 32\times 33\times 100 + 1)$

Donc ces 5 entiers constituent une liste de 5 nombres de Harshad consécutifs.

(b). Pour tout entier $n \geq 2$, on considère les 5 entiers consécutifs $B\times 10^n + 30$, $B\times 10^n + 31$, $B\times 10^n + 32$, $B\times 10^n + 33$ et $B\times 10^n + 34$.
Les sommes de leurs chiffres sont respectivement 30, 31, 32, 33 et 34.
De plus on a:

- $B\times 10^n + 30 = 30\times(31\times 32\times 33\times 34\times 10^n + 1)$;
- $B\times 10^n + 31 = 31\times(30\times 32\times 33\times 34\times 10^n + 1)$;
- $B\times 10^n + 32 = 32\times(30\times 31\times 33\times 34\times 10^n + 1)$;
- $B\times 10^n + 33 = 33\times(30\times 31\times 32\times 34\times 10^n + 1)$;
- $B\times 10^n + 34 = 34\times(30\times 31\times 32\times 33\times 10^n + 1)$

Donc ces 5 entiers constituent une liste de 5 nombres de Harshad consécutifs.
Il existe donc une infinité de listes de 5 nombres de Harshad consécutifs.

6.(a). Soit $i \in [\![0; 8]\!]$.
On a donc $p = a\times 100 + i\times 10 + 9$, avec a entier naturel.
Alors $p + 2 = a\times 100 + i\times 10 + 9 + 2 = a\times 100 + i\times 10 + 11 = a\times 100 + (i+1)\times 10 + 1$ avec $1 \leq i + 1 \leq 9$: $p + 2$ est un entier dont le chiffre des dizaines est $i + 1$ et le chiffre des unités est 1.

La somme des chiffres de p est, en notant α clle des chiffres de a, $\alpha + i + 9$ et celle de $p + 2 = \alpha + i + 1 + 1 = \alpha + i + 2$.
Rappelons que la somme de 2 pairs est paire, de deux impairs est paire et la somme d'un pair et d'un impair est impaire.
Par suite si i est pair, $i + 9$ est impair et $i + 2$ est pair et si i est impair, alors $i + 9$ est pair et $i + 2$ est impair.
Comme $i + 9$ et $i + 2$ sont de parités différentes, alors quelle que soit la parité de α, $\alpha + i + 9$ et $\alpha + i + 2$ sont aussi de parités différentes.
On a bien montré que soit la somme des chiffres de p, soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.

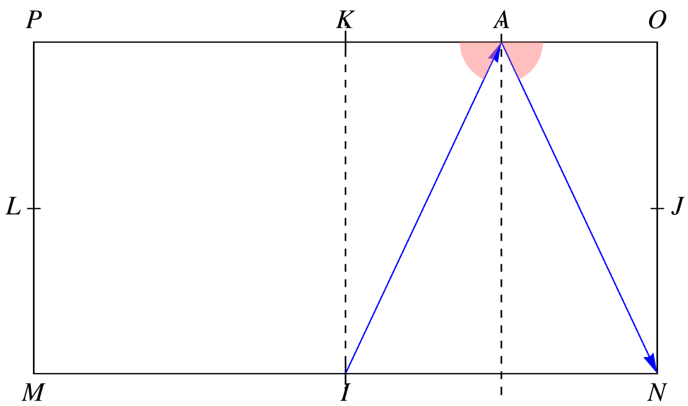
(c). Considérons $(a_i)_{1\leq i\leq 22}$ 22 nombres entiers consécutifs.
Alors il existe au moins un des a_i avec $1 \leq i \leq 20$ tel que son dernier chiffre soit 9 et son chiffre des dizaines soit un entier compris entre 0 et 8.

En effet soit le chiffre des dizaines de a_1 est un entier entre 0 et 8 et alors au plus a_{10} vérifie la condition.
Soit le chiffre des dizaines de a_1 est 9 et alors au plus a_{10} a pour chiffre des unités 0 et donc au plus a_{20} vérifie la propriété.
Dans tous les cas, il existe bien un a_i avec $1 \leq i \leq 20$ vérifiant la condition.
Alors $a_i + 2$ appartient aussi à cette liste.
Or d'après le **6.(a).** on sait que soit la somme des chiffres de a_i soit celle de $a_i + 2 = a_{i+2}$ est un nombre pair.
Or a_i et $a_i + 2$ sont impairs, puisque le chiffre des unités de a_i est 9 et que a_i et $a_i + 2$ sont de même parité.
Or s'ils étaient des nombres de Harshad, l'un des deux serait divisible par un un entier pair donc par 2: absurde.
Par conséquent, une liste de 22 nombres de Harshad consécutifs, n'existe pas.

Exercice 2:

1.(a). Il faut viser le point A du $[PO]$ tel que $PA = \frac{3}{4} PO$.

En effet, en notant I le milieu du rail $[MN]$, le triangle IAN est isocèle en A et donc les angles $\widehat{IAP}$ et $\widehat{NAO}$ sont donc de même mesure.

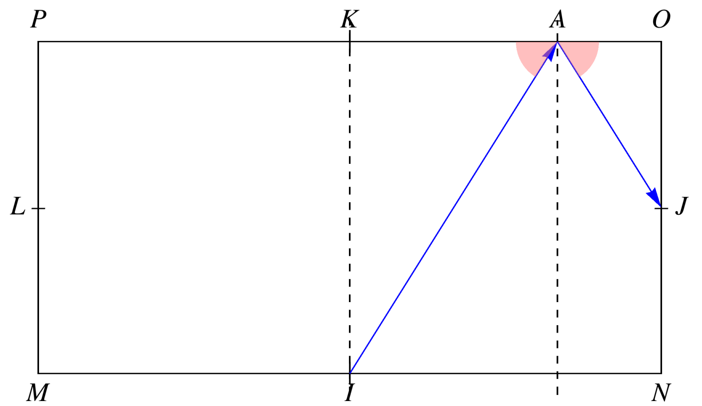


(b). Soit A le point du rail $[PO]$ à viser pour atteindre le milieu du rail $[ON]$.
On note d la distance KA.

Dans les triangles AKI et AOJ respectivement rectangles en K et O, $\tan\left(\widehat{KAI}\right) = \frac{d}{160}$ et $\tan\left(\widehat{JAO}\right) = \frac{150 - d}{80}$.

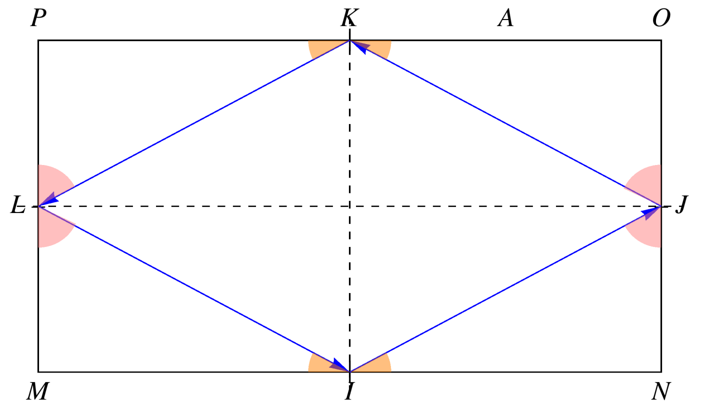
Alors comme les angles $\widehat{KAI}$ et $\widehat{JAO}$ sont égaux, leurs tangentes sont égales et donc d vérifie l'équation $\frac{d}{160} = \frac{150 - d}{80}$.

Finalement $80\,d = 160 \times 150 - 160\,d$ d'où $d = 100 \left(= \frac{2}{3} \times KO \right)$.



On doit donc viser le point A du rail $[PO]$ tel que $PA = \frac{5}{6}PO$.

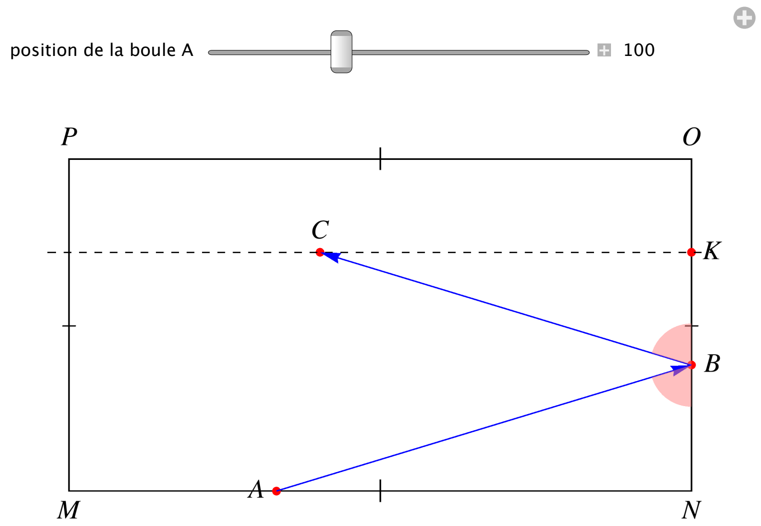
(c). On vise le milieu du rail $[ON]$.



Étant donné les axes de symétrie du rectangle, il est clair que l'on revient en I en 3 rebonds. Les triangles NIJ, OJK, PKL et MIL sont tous semblables.

2.(a). On considère donc un point A du rail $[MN]$ et un point C du billard.
On note K le projeté orthogonal de C sur le rail $[OP]$.
Considérons un point B du rail $[OP]$ tel qu'une boule placée en A atteigne en faisant un rebond en B la boule placée en C.

Alors l'angle $\alpha = A\hat{B}N$ vérifie $\alpha = C\hat{B}K$.



On a donc $\tan(\alpha) = \dfrac{AN}{BN} = \dfrac{CK}{BK}$.

Alors comme $BK = KN - BN$, on obtient $AN(KN - BN) = CK \times BN$ d'où $BN(AN + CK) = AN \times KN$ et finalement $BN = \dfrac{AN \times KN}{AN + CK}$.

Les distances AN, KN, AN et CK étant définies par la position de la boule placée en A et de celle placée en C, la distance BN est toujours définie, le point de rebond B aussi.

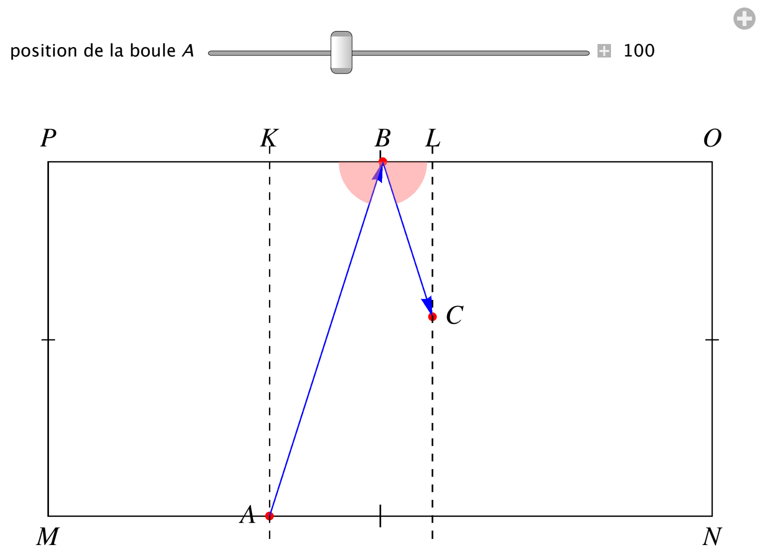
Donc on peut toujours atteindre la boule placée en C en un seul rebond.

Remarque: Avec un rebond sur le rail $[OP]$.

On note K le projeté de A sur le rail $[OP]$ et L celui de C sur le rail $[OP]$.

Considérons un point B du rail $[OP]$ tel qu'une boule placée en A atteigne en faisant un rebond en B la boule placée en C.

Alors l'angle $\alpha = A\hat{B}K$ vérifie $\alpha = C\hat{B}L$.

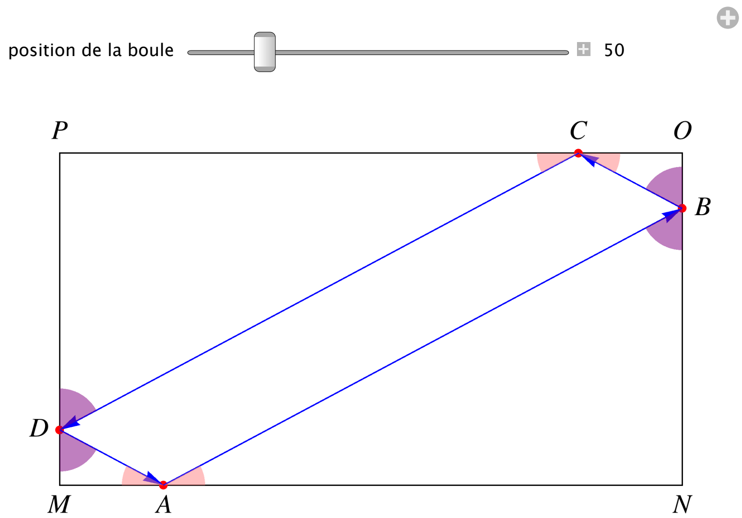


On a donc $\tan(\alpha) = \dfrac{AK}{KB} = \dfrac{CL}{BL}$.

Alors comme $BL = KL - BK$, on obtient $AK(KL - BK) = CL \times KB$ d'où $KB(160 + CL) = 160\,KL$ et

finalement $KB = \dfrac{160\,KL}{160 + CL}$.
Les distances KL et CL étant définies par la position de la boule placée en A et de celle placée en C, la distance KB est toujours définie, le point de rebond B aussi.
Donc on peut toujours atteindre la boule placée en C en un seul rebond de cette manière sauf si A et C sont alignés, on touche la boule C avant le rebond.

2.(b). Considérons un point A du rail $[MN]$ distinct de M et de N.
On se place dans un repère orthonormé d'origine M dont l'axe des abscisses est (MN) et celui des ordonnées est (MP).
On note x l'abscisse de A. On pose $y = \dfrac{160}{300}x$.
On considère alors les points $B(300; 160 - y)$, $C(300 - x; 160)$ et $D(0, y)$.



On a alors:

- $\tan\left(N\hat{A}B\right) = \dfrac{160 - y}{300 - x} = \dfrac{160 - \frac{160}{300}x}{300 - x} = \dfrac{160\,(300 - x)}{300\,(300 - x)} = \dfrac{160}{300}$ et $\tan\left(M\hat{A}D\right) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{160}{300}$ donc

$N\hat{A}B = M\hat{A}D$.

- $\tan\left(P\hat{C}D\right) = \dfrac{160 - y}{300 - x} = \dfrac{160 - \frac{160}{300}x}{300 - x} = \dfrac{160\,(300 - x)}{300\,(300 - x)} = \dfrac{160}{300}$ et $\tan\left(B\hat{C}O\right) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{160}{300}$ donc

$P\hat{C}D = B\hat{C}O$.

Il est alors clair, en raisonnant avec les angles complémentaires dans un triangle rectangle que $A\hat{B}N = C\hat{B}O$ et $A\hat{D}M = C\hat{D}P$.
Donc les angles d'incidence et de réflection définis par la trajectoire $A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow D \leftrightarrow A$ sont égaux deux à deux.
On peut donc frapper la boule placée en A de telle sorte qu'elle revienne à son point initial.

Remarque: l'angle d'attaque est toujours le même, indépendant de la position de la boule. Il ne dépend que de la proportion largeur/longueur du billard.

Considérons maintenant les cas où la boule est placée en M ou en N.
Un tir en trois bandes est impossible, sauf si le rebond peut-être fait en le coin N, en admettant que la boule reparte dans le sens inverse.
En examinant les cas, si l'on vise un point du rail $[ON]$, la boule rebondit

• ou sur le rail $[P\,M]$ puis sur le rail $[O\,P]$, on dépasse les e rebonds,

• ou sur le rail $[O\,P]$ et si elle atteint M deux rebonds seulement auront été effectués, sinon elle rebondit à nouveau sur le rail $[P\,M]$ ou sur le rail $[M\,N]$: on dépasse les 3 rebonds.

Si l'on vise un point du rail $[O\,P]$, le rebond suivant est:

• ou sur le rail $[M\,N]$, puis sur les rails $[O\,P]$ ou $[O\,N]$, on dépasse les trois rebonds,

• ou sur le rail $[O\,N]$, puis soit elle atteint M en deux rebonds seulement, ou rebondit à nouveau sur le rail $[P\,M]$ ou sur le rail $[M\,N]$, on dépasse les 3 rebonds.

Dans tous les cas on ne revient pas en M en 3 rebonds.

De même pour N, *mutatis mutandis*.

Autre méthode:

On peut raisonner de manière plus géométrique en considérant les symétriques

---

Exercice 3:

1. On a:

• $2013 = 1006 + 1007$

• $2013 = 670 + 671 + 672$

• $2013 = 333 + 334 + 335 + 336 + 337 + 338$

2. Supposons qu'il existe une décomposition de 2013 en 4 entiers consécutifs.
Il existe donc un entier n tel que $2013 = n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$.
Par suite n vérifie l'équation $4\,n + 6 = 2013$ d'où $2 \times (2\,n + 3) = 2013$ et 2013 est pair: absurde.
2013 ne peut donc pas se décomposer en somme de 4 entiers consécutifs.

3. Si une telle décomposition existe, il existe donc un entier n tel que
$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 2013$ et donc n est solution de l'équation $5\,n + 10 = 2013$ d'où $5\,n = 2003$.
Or 5 ne divise pas 2003 donc un tel entier n n'existe pas et une décomposition de 2013 en 5 entiers consécutifs non plus.

4. Soit N un entier naturel et k un entier supérieur ou égal à 2.
Si N se décompose en une somme de k entiers consécutifs, il existe donc un entier relatif n tel que

$$N = n + (n+1) + \ldots + (n + k - 1) = \sum_{i=0}^{k-1} (n + i).$$

Par suite on a $N = k\,n + (1 + 2 + \ldots + k - 1) = k\,n + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i$.

Or $1 + 2 + \ldots + (k-1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1)\,k}{2}$ d'où $N = k\,n + \dfrac{(k-1)\,k}{2}$ $(\star)$.

(a). On suppose que k est pair donc $\dfrac{k}{2}$ est un entier naturel.

D'après l'égalité $(\star)$, on obtient $N = \dfrac{k}{2}(2\,n + (k-1))$ et comme $\dfrac{k}{2} \in \mathbb{N}$ alors $\dfrac{k}{2}$ divise N.

(b). On suppose que k est impair. Alors $k - 1$ est pair et donc $\dfrac{k-1}{2}$ est un entier.

D'après l'égalité $(\star)$, on obtient $N = k\left(n + \dfrac{k-1}{2}\right)$ et comme $\dfrac{k-1}{2}$ est un entier, alors $n + \dfrac{k-1}{2}$ est un entier et donc k divise N.

5. D'après la question précédente, les entiers k tels que 2013 se décompose en somme de k entiers consécutifs sont ou pair et alors $\dfrac{k}{2}$ est un diviseur de 2013 ou impair et alors k est un diviseur de 2013.

Par suite les entiers k possibles sont ou des diviseurs de 2013 ou les doubles des diviseurs de 2013.

Comme $2013 = 3 \times 11 \times 61$, ses diviseurs sont 1; 3; 11; 33; 61; 183; 671; 2013.
Par suite les entiers k ($k \geq 2$) possibles sont 3; 11; 33; 61; 183; 671; 2013 ou 2; 6; 22; 66; 122; 366; 1342; 4026.

Les cas 2, 3 et 6 ont été exhibé à la question **1.**

Pour les autres cas, il suffit de déterminer, s'il existe l'entier n tel que $2013 = k\,n + \dfrac{(k-1)\,k}{2}$ $(\star)$ pour chaque k.

Pour k impair:
- $k = 11$: n vérifie $2013 = 11\,n + 55$ d'où $n = 178$. Ainsi $2013 = 178 + 179 + \ldots + 188$.
- $k = 33$: n vérifie $2013 = 33\,n + 528$ d'où $n = 45$. Ainsi $2013 = 45 + 46 + \ldots + 77$.
- $k = 61$: n vérifie $2013 = 61\,n + 1830$ d'où $n = 3$. Ainsi $2013 = 3 + 4 + \ldots + 63$.
- $k = 183$: n vérifie $2013 = 183\,n + 16\,653$ d'où $n = -80$. Ainsi $2013 = -80 + (-79) + \ldots + 102$.
- $k = 671$: n vérifie $2013 = 671\,n + 224\,785$ d'où $n = -332$. Ainsi $2013 = (-332) + (-331) + \ldots + 338$.
- $k = 2013$: n vérifie $2013 = 2013\,n + 2\,025\,078$ d'où $n = -1005$. Ainsi $2013 = (-1005) + (-1004) + \ldots + 1007$.

Pour k pair:
- $k = 22$: n vérifie $2013 = 22\,n + 231$ d'où $n = 81$. Ainsi $2013 = 81 + 82 + \ldots + 102$.
- $k = 66$: n vérifie $2013 = 66\,n + 2145$ d'où $n = -2$. Ainsi $2013 = (-2) + (-1) + \ldots + 63$.
- $k = 122$: n vérifie $2013 = 122\,n + 7381$ d'où $n = -44$. Ainsi $2013 = (-44) + (-43) + \ldots + 77$.
- $k = 366$: n vérifie $2013 = 366\,n + 66\,795$ d'où $n = -177$. Ainsi $2013 = (-177) + (-176) + \ldots + 188$.
- $k = 1342$: n vérifie $2013 = 1342\,n + 899\,811$ d'où $n = -669$. Ainsi $2013 = (-669) + (-668) + \ldots + 672$.
- $k = 4026$: n vérifie $2013 = 4026\,n + 8\,102\,325$ d'où $n = -2012$. Ainsi $2013 = (-2012) + (-2011) + \ldots + 2013$.

Tous les entiers donnent une solution et il n'y en a pas d'autres possibles donc on a obtenu toutes les décompositions de 2013 en entiers consécutifs.

6. On a $2048 = 2^{11}$ donc les diviseurs de 2048 sont $\{1; 2; 2^2; 2^3; 2^4; \ldots; 2^{11}\}$.
Aucun de ces diviseurs (sauf 1, à exclure) est impair donc d'après la question **4.**, les entiers k donnant une décomposition de 2048 en k entiers consécutifs sont tels que $\dfrac{k}{2} \in \left\{1; 2; \ldots; 2^{11}\right\}$ d'où $k \in \{2; 2^2; \ldots; 2^{12}\}$.

D'après $(\star)$, il s'agit donc de déterminer un entier n tel que $2048 = k\,n + \dfrac{(k-1)\,k}{2}$ avec $k \in \{2; 2^2; \ldots; 2^{12}\}$, c'est à dire $k = 2^i$ avec $i \in \{1; 2; \ldots; 12\}$. Remarquons alors que $\dfrac{k}{2}$ est un entier.

D'où $2048 = \dfrac{k}{2}(2\,n + k - 1)$.
Comme $2\,n$ est pair et k est pair, alors $2\,n + k - 1$ est un diviseur impair de 2048.
Par suite, $2\,n + k - 1 = 1$ et $\dfrac{k}{2} = 2048$ d'où $k = 4096$ et comme $2\,n + k - 1 = 1$, $n = -\dfrac{4096 + 2}{2} = -2047$.
On a donc une seule décomposition de 2048 en somme d'entiers consécutifs:
$2048 = (-2047) + (-2046) + \ldots + 2047 + 2048$.

Plus compliqué: On obtient $2^{11} = 2^i\,n + \dfrac{(2^i - 1) \times 2^i}{2} = 2^i\,n + 2^{2\,i-1} - 2^{i-1}$ d'où $2^i\,n = 2^{11} - 2^{2\,i-1} + 2^{i-1}$ et donc $n = 2^{11-i} - 2^{i-1} + 2^{-1}$.
Mais $2^{-1} = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.
De plus:
- pour $i \in \{1; \ldots; 12\}$, $2^{i-1} \in \mathbb{N}$.
- pour $i \in \{1; \ldots; 11\}$, $2^{11-i} \in \mathbb{N}$ puisque $11 - i \geq 0$

Alors pour tout entier $i \in \{1; \ldots 11\}$, $2^{11-i} + 2^{i-1} + 2^{-1} \notin \mathbb{N}$ donc l'entier n n'existe pas.

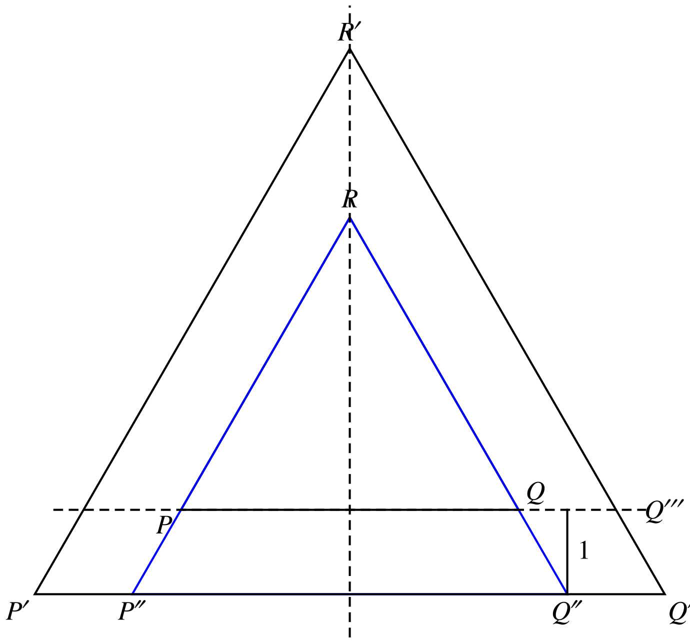
Il reste une seule possibilité: $i = 12$ et alors on obtient $n = \dfrac{1}{2} - 2^{12-1} + \dfrac{1}{2} = -2047$ et $k = 2^{12} = 4096$.

7. Soit k un diviseur impair de N, $k > 1$. Il y a $\phi_N - 1$ entiers de ce type.
Alors une décomposition de N en k entiers conseecutifs existe si'il existe un entier n vérifiant (★):
$N = k\,n + \dfrac{(k-1)\,k}{2}$.
On obtient $n = \dfrac{N}{k} - \dfrac{k-1}{2}$. Alors comme k divise N, $\dfrac{N}{k}$ est entier et comme k est impair, $k-1$ est pair et donc $\dfrac{k-1}{2}$ est entier aussi.
Par suite $n = \dfrac{N}{k} - \dfrac{k-1}{2}$ est entier et donc la décomposition de N en k entiers consécutifs existe toujours.
On compte donc $\phi_N - 1$ décompositions de l'entier N en un nombre impair d'entiers consécutifs.
Soit $k' = 2\,k$ un entier pair.
Une décomposition en k' entiers consécutifs existe s'il existe un entier n vérifiant (★):
$N = k'\,n + \dfrac{(k'-1)\,k'}{2} = 2\,k\,n + \dfrac{(2\,k-1)\times 2\,k}{2} = 2\,k\,n + 2\,(k-1)\,k$.
On en déduit que $n = \dfrac{N}{2\,k} + \dfrac{2\,k-1}{2} = \dfrac{N}{2\,k} + k - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{N}{k}-1}{2} + k$.
Comme k est entier, le nombre n est entier si et seulement si le nombre $\frac{N}{k} - 1$ est pair.
Cela implique que $\dfrac{N}{k}$ est entier donc que k divise N (on le savait déja, question **4.(b).**) et de plus que $\dfrac{N}{k}$ est impair.
Remarquons que si k divise N alors $d = \dfrac{N}{k}$ est aussi un diviseur de N et donc $d = \dfrac{N}{k}$ est un diviseur impair de N.
Par suite, une décomposition de N en $k' = 2\,k$ entiers consécutifs existe si et seulement si k divise N et $\dfrac{N}{k}$ est un diviseur impair de N.
Il y a donc ϕ_N décompositions de N en un nombre pair d'entiers consécutifs.
Finalement, on a donc obtenu $D_N = \phi_N - 1 + \phi_N = 2\,\phi_N - 1$.

Exercice 4:

1. Le carré $ABCD$ a un périmètre de 12 cm et donc son côté mesure 3 cm. Son aire est donc de 9 cm^2.
Le carré agrandit a une longueur de côté égale à $3 + 1 + 1 = 5$ cm et donc son aire est 25 cm^2.
Par suite l'augmentation est de $25 - 9 = 16$ cm^2.

2. Le triangle équilatéral PQR a un périmètre de 12 cm donc son côté mesure 4 cm.
On sait alors que sa hauteur mesure $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm.
Son aire est donc donnée par $\mathcal{A} = \dfrac{4\times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm^2.
Déterminons la longueur du côté du triangle équilatéral $P'\,Q'\,R'$.



On considère tout d'abord le triangle équilatéral $R\,P''\,Q''$ comme défini sur la figure, équilatéral puisque ses angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$.

Sa hauteur est égale à $h'' = h + 1 = 2\sqrt{3} + 1$.

Alors la longueur de son côté est donnée par $c'' = \frac{2}{\sqrt{3}}\,h'' = 4 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm donc $P''\,Q'' = 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ensuite la longueur du côté du losange $Q\,Q''\,Q'\,Q'''$ est donnée par $Q\,Q'' = Q''\,Q' = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Remarquons que c'est un losange pour des raisons de symétrie évidente.

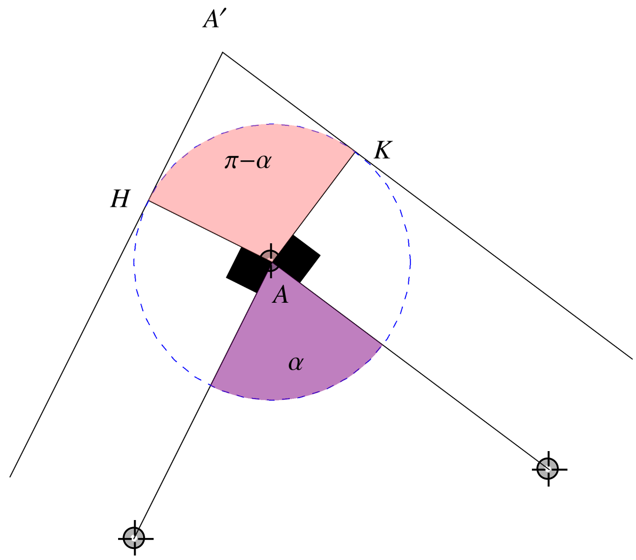
Finalement, la longueur du côté du triangle $P'\,Q'\,R'$ est donc $4 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\times\frac{2\sqrt{3}}{3} = 4 + 2\sqrt{3}$.

On en déduit que sa hauteur est $\left(4 + 2\sqrt{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} + 3$ et donc son aire est

$$\mathcal{A}' = \frac{\left(4 + 2\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3} + 3\right)}{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3} + 3\right) = 7\sqrt{3} + 12\ \text{cm}^2.$$

Finalement l'augmentation est donc égale à $\mathcal{A}' - \mathcal{A} = 12 + 3\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 17,\ 19\ \text{cm}^2$.

3. Considérons un des sommets du polygone convexe.
On note A son sommet et A' le sommet correspondant du polygone augmenté et α l'angle au sommet A du polygone.
On note H et K les projections orthogonales du sommet A sur les côtés du polygone augmenté, comme représenté sur la figure ci-dessous.
Ces projections existenet toujours puisque $0 < \alpha < \pi$.



Remarquons alors que par construction (les angles au sommet étant $<\pi$), le cercle de centre A et de rayon 1, est tangent aux côtés du polygone augmenté.
Par suite l'aire du quadrilatère $AHA'K$ est supérieure ou égale à l'aire du secteur angulaire de centre A de rayon 1 et d'angle $\pi-\alpha$, c'est à dire supérieure à $\dfrac{\pi-\alpha}{2}$.

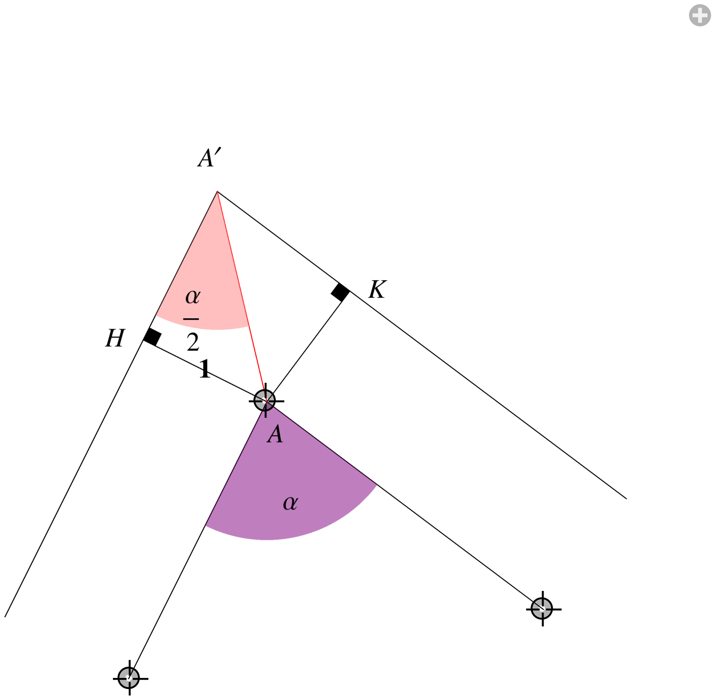
On considère alors le polygone convexe à n côtés de sommets $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, d'angles au sommets $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et de côtés $(c_i)_{1\leq i\leq n}$.
La différence des aires entre les deux polygones peut être décomposée en l'aire de n rectangles de côté c_i et de hauteur 1 et de n quadrilatères comme celui décrit précédemment.

Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = 12$ alors l'aire des n rectangles est égale à 12 $(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \times 1)$.

De plus comme l'aire de chaque quadrilatère est supérieure à $\dfrac{\pi-\alpha_i}{2}$, alors l'aire des n quadrilatères est supérieure à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\pi-\alpha_i}{2} = \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Or on sait $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = (n-2)\pi$ donc l'aire des n quadrilatères est supérieure à $\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{1}{2}(n-2)\pi = \pi$.
Finalement, la différence des aires entre les deux polygones est supérieure à $12+\pi \approx 15,1 > 15$ cm^2.

4. On considère à nouveau un sommet du polygone:



Le quadrilatère $AHA'K$ est la réunion de deux triangles rectangles dont un des côtés de l'angle droit est 1 et l'angle opposé à ce côté est $\frac{\alpha}{2}$.

Alors on en déduit que $A'K = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ et que l'aire de $AA'H = \frac{1}{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ puis que l'aire de $AHA'K$ est égale à $\frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Remarquons que cette expression est toujours définie puisque $0 < \alpha < \pi$ donc $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Finalement, la différence des aires entre les deux polygones est donnée par $12 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}$, en reprenant le découpage de la question précédente et les mêmes notations.

Par suite déterminer un polygone convexe tel que l'aire augmentée soit $< 15,5$ revient à déterminer un polygone convexe tel que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)} < 3,5$.

On considère alors un polygone régulier à n côtés. Chaque angle au sommet a pour mesure $\alpha = \frac{(n-2)\pi}{n} = \pi\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. On a donc $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)} = \frac{n}{\tan\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)}$.

On calcule les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{\tan\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right)}$ pour $n \geq 3$.

On obtient:

nombre de côtés	aire des coins valeur exacte	aire des coins valeur approchée
3	$3\sqrt{3}$	5.196152423
4	4	4.
5	$\frac{5}{\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}}$	3.63271264
6	$2\sqrt{3}$	3.464101615
7	$7\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi}{7}\right]$	3.371022332
8	$8\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi}{8}\right]$	3.313708499
9	$9\,\mathrm{Tan}\left[\frac{\pi}{9}\right]$	3.275732108
10	$\frac{10}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$	3.249196962

On observe dans la table qu'à partir de $n = 6$, $u_n < 3,5$.
Donc il suffit de considérer un polygone régulier ayant plus de 6 côtés pour obtenir une aire augmentée $< 15,5\ \text{cm}^2$.

Remarque: Plus le nombre de côtés augmente, plus le polygone se rapproche d'un cercle.
Ainsi la différence des aires se rapproche de $12 + \pi < 15,5$.

Autre méthode:

On peut remarquer qu'en réduisant le polygone intérieur à 1 point O, les quadrilatères définis dans les questions ci-dessus se rejoignent pour former un polygone à n côtés de telle sorte que O est distant de 1 cm de chaque côté.