Préparation aux olympiades

Mardi 07 décembre 2010

Exercice 1:

a, b, c, d, e, f, g, h et i étant des entiers naturels n'ayant aucun diviseur autre que 1 en commun, on dit que le

tableau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un carré magique multiplicatif (CMM) de produit P si et seulement si le produit des

entiers de chacune des lignes, le produit des entiers de chacune des colonnes et celui des entiers de chacune des deux diagonales est égal à P .

1). Compléter les deux CMM suivants : $\begin{pmatrix} 2 & 9 & \square \\ \square & \square & 1 \\ 3 & 4 & \square \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & \square \\ 2^8 & \square & \square \\ \square & 2^6 & \square \end{pmatrix}$.

2). Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un CMM de produit P alors $e^3 = P$.

Ce résultat, même non démontré peut être utilisé par la suite.

3). Construire un CMM utilisant tous les diviseurs de 100.

4). Montrer que si e est un nombre premier, alors il n'y a que quatre carrés magiques possibles.

5). Construire un carré magique de produit 27000 dont tous les termes sont différents.

Exercice 2:

L'intérieur d'un quadrilatère $ABCD$ est partagé en 4 triangles par ses diagonales.

Les centres des cercles circonscrits à ces 4 triangles forment un quadrilatère $STUV$.

1). Montrer que $STUV$ est toujours un parallélogramme.

2). Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère $ABCD$ pour que $STUV$ soit un carré ?

Exercice 3:

Soit n un entier naturel compris entre 2 et 10.

Une « n -machine » n'effectue que des calculs utilisant les quatre opérations sur des nombres entiers naturels.

Pour cette « n -machine », a, b et c étant des entiers naturels compris entre 0 et $n-1$, le nombre noté $\overline{abc}$ représente le nombre $a n^2 + b n + c$.

Il existe donc neuf n -machines différentes.

Par exemple, pour la « 4-machine » :

– le nombre noté $\overline{231}$ représente le nombre $2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 45$;

- le nombre noté $\overline{1 \times 3}$ représente le nombre $1 \times 4 + 3 = 7$;
- le nombre noté $\overline{2}$ représente le nombre .

- 1). Quel nombre représente le nombre noté $\overline{231}$ pour la « 7-machine » ?
- 2). Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) :
 $\overline{3}x + \overline{43} = \overline{211}$.
 Quelle valeur doit-on donner à n pour que la « n -machine » affiche « 21 » comme solution ?
- 3). Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) :
 $x^2 - \overline{45}x + \overline{322} = \overline{0}$.
 Une autre « n -machine » affiche deux solutions entières comme solutions de cette équation.
 - a). Quelle « n -machine » a-t-on utilisée ? (Il faut donc trouver la “bonne” valeur de n)
 - b). Quelles sont les solutions affichées par cette machine ?

Exercice 4:

Une épreuve de mathématiques comporte quatre questions.

Pour chaque question, on obtient 0 point si la réponse est fausse ou 5 points si la réponse est bonne.

Une des questions consiste à trouver l'aire totale des six faces d'un cube dont le côté s'exprime par un nombre entier de mètres.

Une autre des questions est la suivante :

« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20 euros, baisse de 20 %. Quel est son nouveau prix ? »

Les réponses des élèves, sans unité, sont données par le tableau suivant :

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucille	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Les notes 0 et 20 ont toutes deux été attribuées.

Quelles sont les notes de chacun des élèves ? Justifier les réponses données.