Sciences Po 2010: sujet 0

Correction

Partie I

1.a). La fonction $x \mapsto 1 + \dfrac{a}{x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$ et à valeurs dans $]\,0; +\infty[$ puisque pour $a > 0$ et $x > 0$, $1 + \dfrac{a}{x} > 1 > 0$.

Ainsi comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$ alors par composition, $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

Enfin comme de plus $x \mapsto x$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$, alors par produit, la fonction $f : x \mapsto f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ est déivable sur $]\,0; +\infty[$.

Pour tout réel $x \in]\,0; +\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + x \times \dfrac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) - \dfrac{a}{x\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) - \dfrac{a}{x + a}$.

b). On a montré que la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

On a aussi montré que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{a + x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$ donc $x \mapsto \dfrac{a}{a + x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

Ainsi par somme, $f' : x \mapsto f'(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) - \dfrac{a}{a + x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

Pour tout réel $x \in]\,0; +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} - \left(-\dfrac{a}{(a + x)^2}\right) = -\dfrac{a}{(x + a)\,x} + \dfrac{a}{(a + x)^2} = a\left(\dfrac{-(a + x) + x}{x(a + x)^2}\right) = -\dfrac{a^2}{x(x + a)^2}$.

c). Pour tout réel $x \in]\,0; +\infty[$, $f''(x) = -\dfrac{a^2}{x(x + a)^2}$.

Or $a > 0$ et $x > 0$ donc $x(a + x)^2 > 0$ et ainsi $f''(x) = -\dfrac{a^2}{x(x + a)^2} < 0$.

Par conséquent la fonction f' est strictement décroissante sur $]\,0; +\infty[$.

d). On sait que $\lim\limits_{x \to ++\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{a}{x} = 1$.

De plus $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ par continuité de ln.

Ainsi par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) = 0$.

Ensuite on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x + a = +\infty$ donc par inverse de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x + a} = 0$.

Finalement par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) - \dfrac{a}{x + a} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

La fonction f' est strictement décroissante sur $]\,0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Par suite on peut en déduire que $f'(x) \geq 0$ pour tout réel $x \in]0; +\infty[$.
La fonction f est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque:
La fonction f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc pour tous réels x et x' tels que $0 < x < x'$, on a donc $f'(x) > f'(x')$.
Ainsi par passage à la limite $\lim\limits_{x' \to +\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x' \to +\infty} f(x')$.
Or $\lim\limits_{x' \to +\infty} f'(x) = f'(x)$ (indépendant de x') et $\lim\limits_{x' \to +\infty} f'(x') = 0$.
Donc $f(x) \geq 0$.
Sinon on peut aussi raisonner par l'absurde et montrer que s'il existe $f'(x) < 0$ alors f' ne peut pas être strictement décroissante.

2.a). Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = f(n)$.
Ainsi comme la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$ et comme pour tout entier naturel n, $n < n + 1$ et $n \in]0; +\infty[$ et $n + 1 \in]0; +\infty[$, alors on en déduit $f(n) \leq f(n + 1)$ d'où $v_n \leq v_{n+1}$.
La suite (v_n) est donc croissante.

Remarquons alors que comme pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \ln(u_n)$ alors $e^{v_n} = e^{\ln(u_n)} = u_n$.
Ainsi comme $v_n \leq v_{n+1}$ et comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{v_n} \leq e^{v_{n+1}}$ et ainsi $u_n \leq u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante.

b). On remarque que pour tout réel x, $x > 0$, $\dfrac{\ln(1 + x)}{x} = \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x}$.

On sait que la fonction ln est dérivable en 1 et que $(\ln)'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Or par définition du nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ en 1, on a $(\ln)'(1) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x}$.

On en déduit donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$(et ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$).

c). Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = n\ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = \dfrac{a}{\frac{a}{n}}\ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = a \times \dfrac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}$.

Alors comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ et comme d'après **2.b).**, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$, alors on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a \times \dfrac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = a$.

Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$.

Enfin on a montré que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = e^{v_n}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a \in \mathbb{R}$ et comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n} = e^a$.

Partie II
Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt d'une fraction d'année.

1.a). La somme S_0 est placée au taux annuel de r% avec $r > 0$ donc au bout d'un an de placement, la somme S_0 est multipliée par $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

On dispose donc de la somme $S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)$.

b). Pour $r = 5$ et $S_0 = 10\,000$euros, on obtient donc que la somme dont on dispose au boit d'un an de placement est $10\,000 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 10\,500$ euros.

2.a). Au début de chaque période, la somme placée pour la période est la somme placée la période précédente augmentée de $\frac{r}{n}$%.

Au début de chaque période, la somme placée pour la période est la somme placée la période précédente multipliée par $\left(1 + \frac{\frac{r}{n}}{100}\right) = 1 + \frac{r}{100\,n}$.

Ainsi pour tout entier k, $1 \le k \le n - 1$, $S_k = S_{k-1}\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)$, puisque S_k est la somme placée au début de la $(k + 1)$-ième période et S_{k-1} la somme placée au début de la période précédente.

b). On remarque alors que comme pour $1 \le k \le n - 1$, on a $S_k = S_{k-1}\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)$, alors la suite $(S_k)_{0 \le k \le n}$ est une suite géométrique de premier terme S_0 et de raison $\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)$.

Ainsi pour tout entier $0 \le k \le n$, $S_k = S_0\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^k$ et en particulier $S_n = S_0\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^n = S_0\left(1 + \frac{\frac{r}{100}}{n}\right)^n$.

On pose $a = \frac{r}{100}$, et on obtient $S_n = S_0\, u_n$ où $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

c). On sait, d'après la première partie, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^a = e^{\frac{r}{100}}$ avec $a = \frac{r}{100}$.

Par suite, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_0\, u_n = S_0 \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S_0\, e^a$.

En divisant l'année en un grand nombre de périodes aussi petite que possibles, la somme obtenue au bout d'un an de placement est presque égale à $S_0\, e^{\frac{r}{100}}$.

d). Pour le premier placement la somme obtenue au bout d'un an de placement est $S_0\left(1 + \frac{r}{100}\right) = S_0\, u_1$.

Pour le second placement, la somme obtenue au bout d'un an de placement, pour n périodes, est $S_0\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^n = S_0\, u_n$.

Or on a montré que la suite (u_n) est croissante.

Donc pour tout entier naturel $n \ge 1$, $u_n \ge u_1$.

Ainsi pour tout entier naturel $n \ge 1$, $S_0\, u_n \ge S_0\, u_1$.

Ainsi le deuxième placement est toujours plus avantageux.

e). Au bout d'une année de placement, on obtient $S_{12} = 10\,000 \times \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} \approx 10\,511,\,62$ euros.

On retrouve bien que $10\,511,\,62 > 10\,500$ donc que le 2ième placement est plus avantageux que le premier.

3.a). Posons S_k' la somme placée au début de la $(k + 1)$-ième période pour $0 \le k \le n$.

La somme S_k' est donc la somme S_{k-1}' augmentée des intérêts générés par le taux r_n% pour $1 \le k \le n - 1$.

Ainsi pour tout k, $1 \le k \le n - 1$, on a $S_k' = S_{k-1}'\left(1 + \frac{r_n}{100}\right)$, suite géométrique de raison $\left(1 + \frac{r_n}{100}\right)$ et de premier terme S_0.

On en déduit donc, comme à la question précédente que $S_k' = S_0\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right)^k$ et donc que la somme obtenue au bout d'un an de placement, c'est à dire n périodes, est $S_n' = S_0\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right)^n$.

b). On veut donc déterminer r_n tel que $S_n' = S_0\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$, c'est à dire tel que $\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right)^n = \left(1+\dfrac{r}{100}\right)$.

On en déduit donc $n\ln\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right) = \ln\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$ d'où $\ln\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)}{n}$ puis $1+\dfrac{r_n}{100} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)}{n}}$ et donc $r_n = 100\left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)}{n}} - 1\right)$.

Remarque:

On peut aussi écrire $r_n = 100\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{r}{100}} - 1\right)$ ou $r_n = \left(\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

c). On obtient $r_{12}(5\ \%) = 100\left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{100}\right)}{12}} - 1\right) = 100\left(e^{\frac{\ln(1{,}05)}{12}} - 1\right) \approx 0,407$.

Partie III
Placements avec taux d'intérêt instantané variable.

1). On suppose que pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a $i(t) = b \in \mathbb{R}$.
Par suite la fonciton S estune fonction dérivable sur $[0;+\infty[$, solution de l'équation différentielle $y' = b\,y$.
On sait donc que la fonction S est de la forme $S(t) = C\,e^{b\,t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Comme de plus $S(0) = S_0$ alors on en déduit donc $C\,e^{b\times 0} = S_0$ d'où $C = S_0$.
Ainsi S est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $S(t) = S_0\,e^{b\,t}$.

2.a). Comme i est continue sur $[0;+\infty[$, on sait que la fonction $I : t \mapsto I(t) = \displaystyle\int_0^t i(x)\,dx$ est l'unique primitive de i sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $I(t) = \displaystyle\int_0^t i(x)\,dx$.

b). La fonction S est dérivable sur $[0;+\infty[$ par hypothèse.
De plus comme I est une primitive de i sur $[0;+\infty[$, alors I est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $I' = i$.
Enfin la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée e^{-I} est dérivable sur $[0;+\infty[$ et par produit $\varphi = e^{-I}\times S$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.

Pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $\varphi'(t) = -i(t)\,e^{-I(t)}\,S(t) + e^{I(t)}\,S'(t) = e^{I(t)}(-i(t)\,S(t) + S'(t))$.
Or par hypothèse, S est solution de l'équation différentielle $y' = i(t)\,y$ donc $S'(t) = i(t)\,S(t)$ d'où $-i(t)\,S(t) + S'(t) = 0$.
Par suite pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\varphi'(t) = 0$.
La fonction φ est donc constante sur $[0;+\infty[$.
Ainsi pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $\varphi(t) = \varphi(0) = e^{-I(0)}\,S(0) = e^0\,S_0 = S_0$.

On en déduit donc que pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $e^{-I(t)}\,S(t) = S_0$ et comme $e^a \neq 0$ pour tout réel a, $S(t) = \dfrac{S_0}{e^{-I(t)}} = S_0\,e^{I(t)}$.

3.a). On a $\displaystyle\int_0^t \sin(x)\,e^{-x}\,dx = \int_0^t v(x)\,u'(x)\,dx$ avec $\begin{cases} v(x) = \sin(x) \\ u'(x) = e^{-x} \end{cases}$.

On obtient alors $\begin{cases} v'(x) = \cos(x) \\ u(x) = -e^{-x} \end{cases}$ avec u, v dérivables et u', v' continues sur $[0;+\infty[$, donc d'après la formule d'intégration par parties, $\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = [-\sin(x)\, e^{-x}]_0^t + \int_0^t \cos(x)\, e^{-x}\, dx = -\sin(t)\, e^{-t} + \int_0^t \cos(x)\, e^{-x}\, dx$.

En intégrant à nouveau par parties, $\int_0^t \cos(x)\, e^{-x}\, dx = [-\cos(x)\, e^{-x}]_0^t - \int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx$.

On en déduit $\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = -\sin(t)\, e^{t} - \cos(t)\, e^{-t} + 1 - \int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx$ d'où $2\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))$ et finalement $\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))$.

b). On sait que $S(t) = S_0\, e^{I(t)}$ avec $I(t) = \int_0^t i(x)\, dx$ et $i(t) = b(1 + a\sin(t)\, e^{-t})$.

On a donc $I(t) = \int_0^t b(1 + a\sin(x)\, e^{-x})\, dx = b\left(\int_0^t 1\, dx + a\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx\right)$ par linéarité de l'intégrale.

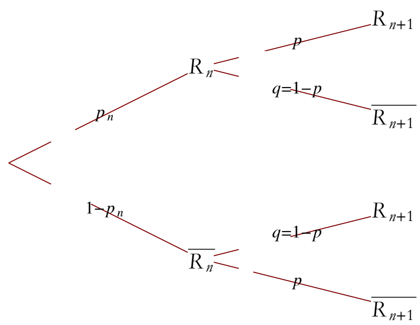
D'après la question précédente, on en déduit donc $I(t) = b\left(t + \frac{a}{2}\, e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))\right)$.

Par suite $S(t) = S_0\, e^{b\left(t + \frac{a}{2} e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))\right)}$.

Partie IV

1). La personne numéro 1 décide d'investir dans ce placement.
Alors $p_1 = 1$.

On a l'arbre de probabilité:



Soit un entier naturel $n \geq 1$.
Remarquons que $R_{n+1} = (R_n \cup R_{n+1}) \cap \left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right)$ et que les événements R_n et $\overline{R_n}$ sont évidemment ncompatibles.
Alors $p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right)$.
Par suite $p_{n+1} = p(R_n)\, p_{R_n}(R_{n+1}) + p(\overline{R_n})\, p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

On a noté $p_n = p(R_n)$ et ainsi $p(\overline{R_n}) = 1 - p(R_n) = 1 - p_n$.

D'autre part, on sait que la personne $(n+1)$ fait le même choix que la personne n avec la probabilité p donc $p_{R_n}(R_{n+1}) = p$ et ne fait pas le même choix avec la probabilité $1 - p$ d'où $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 1 - p$.

Finalement on obtient donc $p_{n+1} = p_n \times p + (1 - p_n)\,(1 - p)$ d'où $p_{n+1} = p_n \times p + 1 - p - p_n(1 - p) = p_n(p - (1 - p)) + 1 - p$ et donc $p_{n+1} = (2\,p - 1)\, p_n + 1 - p$.

2). On suppose $p = \frac{1}{2}$.

On obtient alors pour tout entier naturel $n > 0$, $p_{n+1} = \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right) p_n + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $p_1 = 1$ et $p_n = \frac{1}{2}$ pour $n > 1$.

La suite (p_n) est donc stationnaire à partir du rang 2.

Le choix de la personne précédente n'a donc pas d'influence sur le choix de la personne suivante.

3.a). Soit $n > 0$.

$w_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\,p_n + 1 - p - \frac{1}{2} = (2p-1)\,p_n + \frac{1}{2} - p.$

Remarquons alors que $\frac{1}{2} - p = -\frac{1}{2}(2p-1)$.

On obtient donc $w_{n+1} = (2p-1)\,p_n - \frac{1}{2}(2p-1) = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = (2p-1)\,w_n$.

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $(2p-1)$ et de premier terme $w_1 = p_1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b). Comme la suite (w_n) est donc géométrique de raison $(2p-1)$ et de premier terme $w_1 = \frac{1}{2}$, alors on sait que pour tout entier naturel $n > 0$, $w_n = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}$.

Ensuite comme $p_n = w_n + \frac{1}{2}$, on obtient donc $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}$ pour tout entier naturel $n > 0$.

c). On a $0 < p < 1$ donc $0 < 2p < 2$ et ainsi $-1 < 2p - 1 < 1$.

On sait alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(2p-1)^{n-1} = 0$ et on en déduit donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Finalement, après qu'un grand nombre de personnes aient ou n'aient pas investi dans le placement et en aient parlé à une autre personne, la probabilité que la personne suivante décide d'investir ou non dans ce placement est égale à $\frac{1}{2}$, comme si une personne décidait d'investir ou non 1 fois sur 2, sans qu'elle tienne compte du choix de la personne qui lui en parle.

4.a). On a $p = 0,08$ et donc $p_{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\times 0,08 - 1)^{19} \approx 0,518$.

b). On cherche l'entier n tel que $0,49\,999 \leq p_n \leq 0,50\,001$ donc tel que $-0,00\,001 \leq \frac{1}{2}(0,16-1)^n \leq 0,00\,001$ d'où tel que $-0,00\,002 \leq (-0,84)^n \leq 0,00\,002$.

Si n est pair on a $(-0,84)^n = 0,84^n$ donc il faut $0 < 0,84^n \leq 0,00\,002$.

Si n est impair, $(-0,84)^n = -(0,84)^n$ donc il faut $-0,00\,002 \leq -0,84^n < 0$ d'où $0 < 0,84^n \leq 0,00\,002$.

Dans tous les cas il faut $0 < 0,84^n \leq 0,00\,002$ d'où $n\ln(0,84) \leq \ln(0,00\,002)$ et donc $n \geq \dfrac{\ln(0,00\,002)}{\ln(0,84)}$ puisque $\ln(0,84) < 0$.

Comme $\dfrac{\ln(0,00\,002)}{\ln(0,84)} > 62$ et n est un entier naturel, on en déduit que le plus entier naturel tel que $-0,49\,999 \leq p_n \leq 0,50\,001$ est $n = 63$.