Sciences Po 2010: sujet 0

Mathématiques

Durée de l'épreuve: 4 heures.

L'usage des calculatrices est autorisé.

> **La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Ce problème comporte 4 parties.
La partie III et la partie IV peuvent être traitées indépendamment des parties I et II.
Les réusltats établis dansla partie I pourront être utilisés dans la partie II.
Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie I

Dans cette partie, a est un réel strictement positif donné.

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel strictement positif par $f(x) = x\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$.

a. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]\,0;+\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x+a}$.

b. Montrer que la fonction f' est dérivable sur $]\,0;+\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout réel x strictement positif.

c. Étudier les variations de la fonction f'.

d. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x réel strictement positif, puis le sens de variation de la fonction f.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par: $u_n - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ et $v_n = \ln(u_n)$.

a. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
En déduire celle de la suite (u_n).

b. Déterminer la limite en 0 de la fonction qui à tout x strictement positif associe $\frac{\ln(1+x)}{x}$.

c. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Partie II
Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt d'une fraction d'année.

On considère un capital S_0 que l'on place de différentes façons.

1. La somme S_0 est placée durant une année au taux annuel de r %, r est un réel strictement positif.

a. De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement ?

b. Application numérique:
On a taux de 5% ($r = 5$) et $S_0 = 10\,000$ euros.
De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement ?

2. Soit n un entier naturel non nu;.
L'année est divisée en n peériodes de durées égales.
La somme S_0 est placée au taux d'intérêt de $\frac{r}{n}$ % pour chaque période, r est un réel strictement positif.

Dans ce cas la somme S_1 placée au début de la deuxième période est la somme S_0 à laquelle on ajoute les intérêts obtenus au cours de la première période.

De même la somme S_k pour $1 \leq k \leq n-1$ placée au début de la $(k+1)^e$ période est la somme S_{k-1} à laquelle ont été ajoutés les intérêts obtenus au cours de la k^e période.

a. De quelle sommme dispose-t-on à l'issue d'une période ?

b. Montrer qu'à l'issue d'une année de placement, on dispose de la somme $S_n = S_0 \times u_n$ où u_n est le terme général de la suite (u_n) définie dans la partie I pour une valeur de a que l'on donnera en fonction de r et de n .

c. Déterminer la limite de la somme S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Interpréter ce résultat.

d. Comparer les placements des questions **1.** et **2.**
Lequel est le plus avantageux ?

e. Application numérique:
On a un taux de 5% ($r = 5$), $n = 12$ et $S_0 = 10\,000$ euos.
Quelle somme obtient-on au bout d'une année de placement ? Retrouver le résultat du **d.**

3. Soit n un entier naturel non nul.
L'année est divisée en n périodes de durées égales.
La somme S_0 est placée au taux d'intérêt de r_n % pour chacune de ces périodes, r_n est un réel strictement positif indépendant de la période considérée.

a. De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement, le principe étant le même que celui de la question **2.** ?

b. On souhaite que le placement de la somme S_0 dans ce cas rapporte autant au bout d'un an que si la S_0 était placée au taux annuel de r %, c'est à dire comme à la question **1.**
Exprimeralors r_n en fonction de r et de n .

c. Application numérique:
On a un taux de 5% ($r = 5$), $n = 12$.
Quel est le taux de placement pour chaque période dans ce cas ?

Partie III
Placements avec taux d'intérêt instantané variable.

La somme S_0 est placée pour tout réel t positif au taux d'intérêt instantané $i(t)$ où t représente la durée du placement, exprimée en années.

Soit la fonction S qui à chaque réel t positif associe la somme $S(t)$, disponible au bout de t année.

On suppose que la fonction S est:

— dérivable sur $[0; +\infty[$

— solution de l'équation différentielle $y' = i(t)\ y$.

On a $y(0) = S_0$.

1. Déterminer la fonction S lorsque la fonction i est une fonction constante sur $[0; +\infty[$, c'est à dire telle qu'il existe un réel strictement positif b tel que pour tout $t \in [0; +\infty[$, $i(t) = b$.

2. On suppose que la fonction i est continue sur $[0; +\infty[$.
Soit I la primitive de i sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.

a. Exprimer $I(t)$ à l'aide d'une intégrale pour tout t de $[0; +\infty[$.

b. Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(t) = e^{-I(t)}\ S(t)$.
Montrer que φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et calculer $\varphi'(t)$ pour tout t de $[0; +\infty[$.
En déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et de $I(t)$ pour tout t de $[0; +\infty[$.

3. Application numérique:
Soit a et b deux réels strictements positifs. On pose pour tout t de $[0; +\infty[$, $i(t) = b(1 + a\sin(t)\ e^{-t})$.

a. Calculer $\displaystyle\int_0^t \sin(x)\ e^{-x}\ dx$ pour tout t de $[0; +\infty[$ en utilisant le théorème d'intégration par parties.

b. Quelle est la somme $S(t)$ obtenue au bout de t année de ce placement ?

Partie IV

Un organisme financier propose un placement attractif en ce temps de crise, au taux garanti de 5% par an comme dans l'application numérique de la partie II-1.
On considère un club d'investissement dont on décide de numéroter les adhérents (1, 2, …, n, … etc).
Soit p un réel donné de l'intervalle $]\,0; 1[$.
La personne numéro 1 décide d'investir dans ce placement et en parle à la personne numéro 2 qui fait de même avec la probabilité p ou décide de ne pas le faire avec la probabilité $q = 1 - p$.

Soit R_n l'événement: « la personne numéro n investit dans le placement» et $p(R_n) = p_n$ la probabilité de cet événement.

1. Donner la valeur de p_1.
Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, $p_{n+1} = (2p - 1)\, p_n + 1 - p$.

2. Que se passe-t-il si $p = \dfrac{1}{2}$?

3. On suppose désormais $p \neq \frac{1}{2}$ et on pose $w_n = p_n - \frac{1}{2}$ pour tout entier naturel n strictement positif.

a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Exprimer w_n , puis u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n strictement positif.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpéter ce résultat.

4. $p = 0,08$.

a. Quelle est la probabilité que la 20$^{\text{ème}}$ personne investisse dans ce placement ?

b. Quelle est la plus petite valeur de l'entier naturel n non nul, à partir de laquelle la probabilité que la personne numéro n investise dans le placement soit comprise entre $0,49\,999$ et $0,50\,001$?