Épreuve de Mathématiques, Session 2010

Correction

Problème

I. Des arcs d'hyperboles

1. Distinguons le cas $m = 0$.
Pour $m = 0$, $f_0(x) = 0$ et $g_0(x) = 1$ donc les fonctions f_0 et g_0 sont constantes.

Soit $m \in]\,0; 1]$.

La fonction $x \mapsto 1 - x$ est strictement décroissante sur $[0; 1[$ à valeurs dans $]\,0; 1]$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]\,0; +\infty[$ donc par composition $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est strictement croissante sur $[0; 1[$ et comme $m > 0$, alors $f_m : x \mapsto \dfrac{m}{1-x}$ est strictement croissante sur $[0; 1[$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]\,0; 1]$ à valeurs dans $[1; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 - mx$ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ puisque $m > 0$.
Alors par composition, $g_m : x \mapsto 1 - \dfrac{m}{x}$ est strictement croissante sur $]\,0; 1]$.

Remarque:
On peut bien sur aussi dériver chacune des deux fonctions:
$f_m{}'(x) = -\left(\dfrac{-1}{(1-x)^2}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$ pour $x \in [0; 1[$ et $g_m{}'(x) = -\left(-\dfrac{m}{x^2}\right) = \dfrac{m}{x^2} > 0$ pour $x \in]\,0; 1]$.

2. Distinguons à nouveau le cas $m = 0$.
Comme $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0; 1[$ alors $f_0(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $[0; 1[$.
Comme $g_0(x) = 1$ pour tout $x \in]\,0; 1]$, alors $g_0(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]\,0; 1]$.

Soit $m \in]\,0; 1]$.

On résout $f_m(x) = 1$.
On a donc $\dfrac{m}{1-x} = 1$ d'où $\dfrac{m-(1-x)}{1-x} = 0$ et donc pour $x \neq 1$, il faut $x + (m-1) = 0$ d'où $x = -m + 1$.
Comme pour tout réel $m \in [0; 1]$, $-1 \leq m \leq 0$ alors $0 \leq 1 - m \leq 1$, l'équation $f_m(x) = 1$ admet une unique solution sur $[0; 1[$, $x_{f\,m} = 1 - m$.

On résout $g_m(x) = 0$ c'est à dire $1 - \dfrac{m}{x} = 0$ d'où $\dfrac{x-m}{x} = 0$ et comme $x \neq 0$ alors il faut $x - m = 0$ d'où $x = m$ et comme $m \in]\,0; 1]$, la solution est toujours valide.
L'équation $g_m(x) = 0$ admet dnc pour unique solution sur $]\,0; 1]$, $x_{g\,m} = m$.

3. Résolvons $f_m(x) = g_m(x)$.

Considérons le cas $m = 0$.
On a $f_0(x) = 0$ et $g_0(x) = 1$ donc l'équation $f_0(x) = g_0(x)$ n'a pas de solution.

Soit $m \neq 0$, alors $0 < m \leq 1$.
On résout donc $\dfrac{m}{1-x} = 1 - \dfrac{m}{x}$ d'où $\dfrac{mx + m(1-x) - x(1-x)}{x(1-x)} = 0$ et donc $\dfrac{x^2 - x + m}{x(1-x)} = 0$.

Ainsi pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, il faut $x^2 - x + m = 0$.

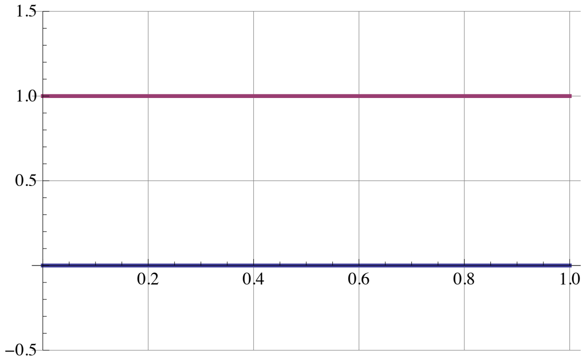
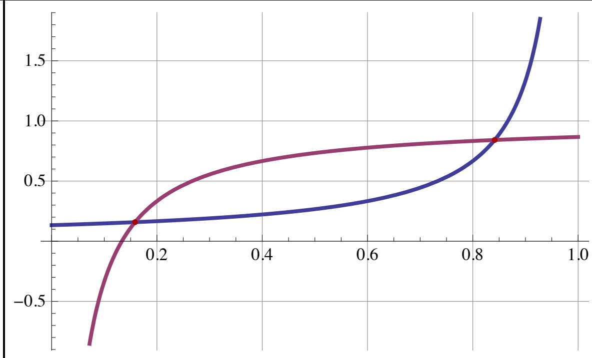
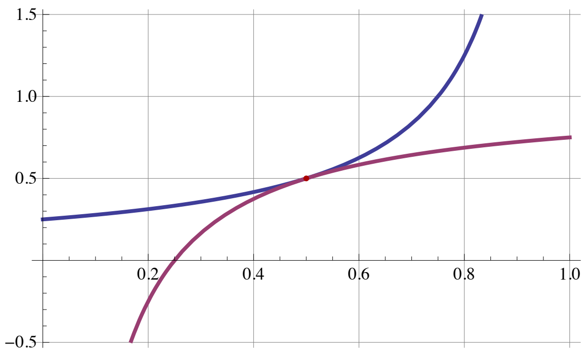
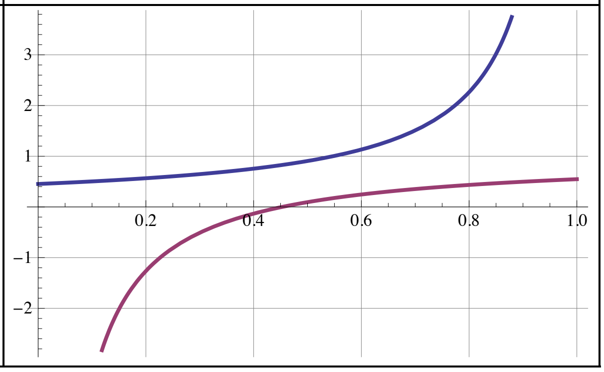
L'équation du second degré $x^2 - x + m = 0$ admet pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\,m = \left(1 - 2\sqrt{m}\right)\left(1 + 2\sqrt{m}\right)$.

Le signe de ce discriminant est le signe de $1 - 2\sqrt{m}$ puisque $m \in [0;\, 1]$ et donc $1 + 2\sqrt{m} > 0$.

Or $1 - 2\sqrt{m} > 0$ si $1 > 2\sqrt{m}$ d'où $\sqrt{m} < \frac{1}{2}$ et donc comme $m > 0$, si $0 \leq m < \frac{1}{4} < 1$.

On en déduit donc que l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ admet 2 solutions si $m \in \left]0;\, \frac{1}{4}\right]$, 1 solution si $m = \frac{1}{4}$ et aucune solution si $m \in \{0\} \bigcup \left]\frac{1}{4};\, 1\right]$.

4. On obtient le graphique:

<table>
<tr><td>$m = 0$</td><td>$0 < m < \frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>pas de solution</td><td>2 solutions</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$m = \frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{4} < m \leq 1$</td></tr>
<tr><td>1 unique solution</td><td>pas de solution</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

II. Des lignes de niveau

1. Pour R_1: le rectangle R_1 a pour dimensions x et y donc son aire A_1 est donnée par $A_1(x;y) = A_{R_1}(x;y) = x\,y$.

Pour R_2: le rectangle R_2 a pour dimension $1-x$ et y donc son aire A_2 est donnée par $A_2(x;y) = A_{R_2}(x;y) = (1-x)\,y$

Pour R_3: le retcangle R_3 a pour dimension $1-x$ et $1-y$ donc son aire A_3 est donnée par $A_3(x;y) = A_{R_3}(x;y) = (1-x)\,(1-y)$

Pour R_4: le rectangle R_4 a pour dimension x et $1-y$ donc son aire A_4 est donnée par $A_4(x;y) = A_{R_4}(x;y) = x(1-y)$.

2. On note $A(x;y)$ la plus grande des aires obtenues.

Les 4 rectangles sont inclus dans le carré *OIDJ* d'aire 1 donc on a forcément $A(x;y) \leq 1$.

La somme des 4 aires est égale à 1: on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} A_i(x;y) = 1$

Alors si $A(x;y) < \dfrac{1}{4}$, comme $A_i(x;y) \leq A(x;y)$ pour $i \in \{1;2;3;4\}$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} A_i(x;y) < 4 \times \frac{1}{4}$ d'où

$\displaystyle\sum_{i=1}^{4} A_i(x;y) < 1$: absurde.

Par suite $A(x;y) \geq \frac{1}{4}$.

On peut donc assuré $\dfrac{1}{4} \leq A(x;y) \leq 1$.

Remarque:
Si $x = 1$ ou $y = 1$, alors on a $A(x;y) = 1$.
Si $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2}$, alors on a $A(x;y) = \dfrac{1}{4}$.

3. Soit $(x;y)$ un couple de réels de l'intervalle $[0;1]$.
Remarquons que:

- $A_1(y;x) = y\,x = A_1(x;y)$
- $A_2(y;x) = (1-y)\,x = A_4(x;y)$
- $A_3(y;x) = (1-y)\,(1-x) = A_1(x;y)$
- $A_4(y;x) = y(1-x) = A_2(x;y)$.

Par suite
$A(y;x) = \mathrm{Max}(A_1(y;x); A_2(y;x); A_3(y;x); A_4(y;x)) = \mathrm{Max}(A_3(x;y); A_4(x;y); A_1(x;y); A_2(x;y)) = A(x;y)$.

4. L'inéquation $t \geq 1-t$ donne $2\,t \geq 1$ d'où $t \geq \dfrac{1}{2}$.

Donc $t \geq 1-t$ avec $t \in [0;1]$ si $t \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

Avec $y \in]\,0;1]$, $x\,y \geq (1-x)\,y$ si et seulement si $x \geq 1-x$ donc d'après le résultat précédent si $x \geq \dfrac{1}{2}$.

Ainsi pour $y \in]\,0;1]$, $A_1(x;y) \geq A_2(x;y)$ pour $x \geq \dfrac{1}{2}$.

On peut remarquer que l'inégalité est encore vraie pour $y = 0$.

Avec $x \in]\,0;1]$, $x\,y \geq x(1-y)$ si et seulement si $y \geq 1-y$ donc si $y \geq \dfrac{1}{2}$.

Ainsi pour $x \in]\,0;1]$, $A_1(x;y) \geq A_4(x;y)$ si $y \geq \dfrac{1}{2}$.

Remarquons que l'inégalité est vraie pour $x = 0$.

De même, on montre que $A_4(x;\ y) \geq A_3(x;\ y)$ pour $y \geq \frac{1}{2}$ quel que soit $x \in [0; 1]$ et que $A_2(x;\ y) \geq A_3(x;\ y)$ pour $x \geq \frac{1}{2}$ quel que soit $y \in [0; 1]$.

On en déduit $A(x;\ y) = \begin{cases} A_1(x;\ y) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ A_2(x;\ y) \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ A_3(x;\ y) \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ A_4(x;\ y) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où

$$A(x;\ y) = \begin{cases} x\,y \text{ pour } (x;\ y) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ (1-x)\,y \text{ pour } (x;\ y) \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\ (1-x)\,(1-y) \text{ pour } (x;\ y) \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ x(1-y) \text{ pour } (x;\ y) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right] \end{cases}.$$

5. Pour tout réel m du segment $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$, on note L_m la ligne de niveau m de l'application A, c'est à dire l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient $A(x;\ y) = m$.

a. Soit $m \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

On résout $A(x;\ y) = m$.

Pour $(x;\ y) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on obtient $x\,y = m$ d'où $y = \frac{m}{x}$.

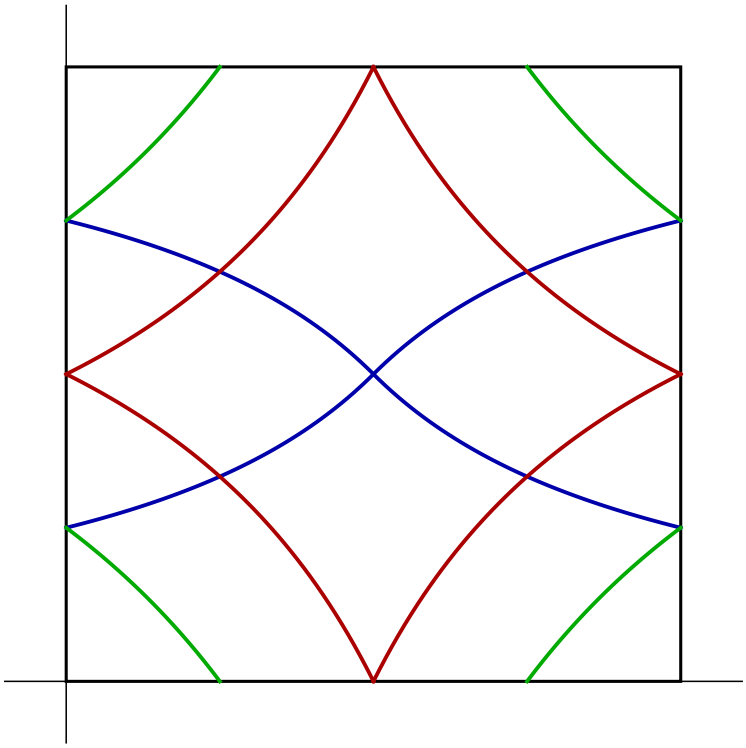
Pour $(x;\ y) \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on obtient $(1-x)\,y = m$ d'où $y = \frac{m}{1-x}$.

Pour $(x;\ y) \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right]$, on obtient $(1-x)\,(1-y) = m$ d'où $y = 1 - \frac{m}{1-x}$.

Pour $(x;\ y) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \times \left[0; \frac{1}{2}\right]$, on obtient $x\,(1-y) = m$ d'où $y = 1 - \frac{m}{x}$.

b. On obtient les lignes de niveaux:

- En bleu: $m = \frac{1}{4}$
- En rouge: $m = \frac{1}{2}$
- En vert: $m = \frac{3}{4}$



III. Étude d'un ensemble de fonctions affines par morceaux

1. Si $x \leq t$, on résout donc $x(1-t)=0$ d'où $x=0$ ou $1-t=0$ et donc il faut $x=0 \leq t$ ou $t=1$.
Si $x > t$, on résout $t(1-x)=0$ d'où $t=0$ ou $1-x=0$ et donc il faut $t=0$ ou $x=1$.

Par conséquent $K(t;x)=0$ pour les couples $(0;t)$, $t\in[0;1]$, $(x;1)$, $x\in[0;1]$, $(1;t)$, $t\in[0;1]$ et $(x;0)$, $x\in[0;1]$.
Donc $K(t;x)=0$ sur pour tout couple $(x;t)$ tel que le point de coordonnées $(x;t)$ soit un point des côtés du carré $OIDJ$, de la **partie II**.

2. On donne un réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

a. Soit $t\in]0;1[$.
Comme $1-t>0$, alors la fonction k_t est strictement croissante sur $[0;t]$.
Comme $t\geq 0$, $-t\leq 0$, alors la fonction $k_t : x\mapsto -t\,x+t$ est strictement décroissante sur $[t;1]$.

Pour $t=0$, $k_0 : x\mapsto 0$: la fonction est constante égale à 0 et pour $t=1$, $k_1 : x\mapsto 0$, la fonction est constante égale à 0.

Remarquons que $\lim\limits_{x\to t^+} k_t(x)=t(1-t)=k_t(t)$ donc la fonction k_t est continue en t.

Comme elle est trivialement continue sur $[0;t[$ et sur $]t;1]$, elle est donc continue sur $[0;t]$.

On a le tableau de variation pour $t\in]0;1[$:

x	0	t	1
k_t	0 ↗	$t(1-t)$	↘ 0

b. Pour $t=0$ ou $t=1$, la fonction k_t est constante égale à 0 donc elle présente un maximum égal à 0.

Soit $t\in]0;1[$.
La fonction k_t est strictement croissante sur $[0;t]$ donc pour tout réel $x\in[0;t]$, $k_t(x)\leq k_t(t)$.
La fonction k_t est strictement décroissante sur $[t;1]$ donc pour tout réel $x\in[t;1]$, $k_t(x)\leq k_t(t)$.
Dans tous les cas, $k_t(x)\leq k_t(t)$ donc la fonciton présente un maximum égal à $k_t(t)=t(1-t)$ atteint en $x=t$.

3. Considérons la fonction $k : t\mapsto k_t(t)=t(1-t)$ pour $t\in[0;1]$.
C'est une fonction du second degré ayant pour racines 0 et 1, dont le coefficient des termes au carré est $-1<0$ donc on sait que cette fonction admet un maximum atteint pour $t_0=-\dfrac{1}{2\times(-1)}=\dfrac{1}{2}$ égal à $k\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

On a donc montré que pour tout couple de réels $(t;x)\in[0;1]\times[0;1]$, $K(t;x)\leq K(t;t)$ et pour tout réel $t\in[0;1]$, $K(t;t)\leq K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Ainsi pour tout couple $(t;x)$ de réels compris entre 0 en 1, on ait $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\geq K(t;x)$.

On pose $(t_0;x_0)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, et donc on a montré qu'il existe un couple $(t_0;x_0)$ de réels compris entre 0 et 1 tel que pour tout couple $(t;x)$ de réels compris entre 0 en 1, on ait $K(t_0;x_0)\geq K(t;x)$.

IV. Un noyau pour transformer des fonctions

1. Puisque $K(t;x) = \begin{cases} (1-t)\,x \text{ pour } 0 \le x \le t \\ x(1-t) \text{ pour } t < x \le 1 \end{cases}$ et comme d'après la relation de Chasles pour tout $t \in [0;1]$,

$\int_0^1 K(t;x)\,dx = \int_0^t K(t;x)\,dx + \int_t^1 K(t;x)\,dx,$ alors on obtient

$\int_0^1 K(t;x)\,f(x)\,dx = \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx.$

On a alors pour tout $t \in [0;1]$, $h(t) = \int_0^1 K(t;x)\,dx = \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx = (1-t)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t + t\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_t^1$

d'où $h(t) = (1-t)\,\frac{t^2}{2} + t\left(-\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\,(t - t^2).$

Remarque:
Comme pour tout couple $(t;x)$ de réels compris entre 0 et 1, la fonction $K(t;x)$ est positive, alors pour tout réel $t \in [0;1]$, $h(t)$ est l'aire sous la courbe de k_t sur l'intervalle $[0;1]$.
La fonction k_t est une fonction affine par morceaux, l'aire sous la courbe k_t sur $[0;1]$ est l'aire d'un triangle isocèle de base 1 et de hauteur $t(1-t)$ et est donc donnée par $h(t) = \frac{1 \times t(1-t)}{2} = \frac{1}{2}\,t(1-t)$.

2. On appelle s la fonction définie sur $[0;1]$ par $s(x) = \sin(2\pi x)$.

On a $\hat{s}(t) = \int_0^1 K(t;x)\,s(x)\,dx = (1-t)\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx + t\int_t^1 (1-x)\sin(2\pi x)\,dx = .$

$$(1-t)\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx - t\int_t^1 x\sin(2\pi x)\,dx + t\int_t^1 \sin(2\pi x)\,dx$$

Soit a et b deux réels.

Alors la formule d'intégration par parties donne

$\int_a^b x\sin(2\pi x)\,dx = \left[x \times \left(-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right)\right]_a^b - \int_a^b 1 \times \left(\frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi}\right)dx$.

Par suite $\int_a^b x\sin(2\pi x)\,dx = -\frac{b}{2\pi}\cos(2\pi b) + \frac{a}{2\pi}\cos(2\pi a) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi b) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi a)$.

On en déduit $\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx = -\frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)$ et

$\int_t^1 x\sin(2\pi x)\,dx =$.

$$-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + \frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t) = -\frac{1}{2\pi} + \frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)$$

De plus $\int_t^1 \sin(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{2\pi}.$

On obtient
$\hat{s}(t) = (1-t)\left(-\frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)\right) - t\left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)\right) + t\left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{2\pi}\right)$

D'où finalement $\hat{s}(t) = \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)$.

4. La fonction f est continue sur $[0;1]$. Par suite la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(u)\,du$ est définie sur $[0;1]$ et est la primitive de f qui s'annule en 0.
Rappelons que $F'(x) = f(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$.

On a:

$\hat{f}(t) = \int_0^1 K(t;x)\, f(x)\, dx$

$\hat{f}(t) = (1-t)\int_0^t x\, f(x)\, dx + t\int_t^1 (1-x)\, f(x)\, dx$

$\hat{f}(t) = \int_0^t x\, f(x)\, dx - t\int_0^t x\, f(x)\, dx + t\int_t^1 f(x)\, dx - t\int_t^1 x\, f(x)\, dx$

$\hat{f}(t) = \int_0^t x\, f(x)\, dx - t\int_0^1 x\, f(x)\, dx + t\int_t^1 f(x)\, dx$

Calculons à l'aide d'une intégration par parties $\int_a^b x\, f(x)\, dx$ avec a et b des réels de l'intervalle $[0; 1]$.

On obtient $\int_a^b x\, f(x)\, dx = [x\, F(x)]_a^b - \int_a^b 1 \times F(x)\, dx = b\, F(x) - a\, F(a) - \int_a^b F(x)\, dx$.

Remarquons que $\int_a^b F(x)\, dx$ est bien définie pouisque F est continue sur $[0; 1]$ car dérivable sur $[0; 1]$.

Ainsi, $\hat{f}(t) = \left(t\, F(t) - 0 \times F(0) - \int_0^t F(x)\, dx\right) - t\left((F(1) - F(0)) - \int_0^1 F(x)\, dx\right) + t(F(1) - F(t))$.

Rappelons que $F(0) = 0$ et donc $\hat{f}(t) = t\int_0^1 F(x)\, dx - \int_0^t F(x)\, dx$.

La fonction $t \mapsto \left(\int_0^1 F(x)\, dx\right) t$ est une fonction linéaire donc elle est deux fois dérivable sur $[0; 1]$ et sa dérivée seconde est la fonction nulle.

La fonction $t \mapsto \int_0^t F(x)\, dx$ est dérivable sur $[0; 1]$ puisque F est continue sur $[0; 1]$ et sa dérivée est la fonction $t \mapsto F(t)$.

Comme de plus F est une primitive de f, alors F est dérivable sur $[0; 1]$ de dérivée f et on en déduit que la fonction $t \mapsto \int_0^t F(x)\, dx$ est deux fois dérivable sur $[0; 1]$ et que sa dérivée seconde est la fonction $t \mapsto f(t)$.

Par conséquent $\hat{f}$ admet une dérivée seconde sur $[0; 1]$ comme somme de fonctions qui admettent des dérivées secondes sur $[0; 1]$.

De plus $\left(\hat{f}\right)''(t) = 0 - f(t) = -f(t)$ pour tout $t \in [0; 1]$.

5. Soit g une fonction appartenant à E.

On a montré que quelle que soit la fonction f de E, la fonction $\hat{f}$ est aussi une fonction de E.

En effet la fonction $\hat{f}$ est définie et continue (puisque dérivable) sur $[0; 1]$ et de plus $\hat{f}(0) = \hat{f}(1) = 0$.

De plus on a montré que $\left(\hat{f}\right)'' = -f$.

On peut donc en déduire que la fonction $-\hat{g}$ est une solution appartenant à E de l'équation différentielle $f'' = g$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $f'' = g$ appartenant elles aussi à E ? Combien y en a t-il ?

Soit φ une autre solution de cette équation différentielle.

Alors on a $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)'' = \varphi'' + \left(\hat{g}\right)'' = g - g = 0$: la fonction $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)'$ est donc constante.

Il existe un réel k tel que $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)'(t) = k\, t$ pour tout $t \in [0; 1]$.

Finalement il existe une constante réelle c telle que $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)(t) = k\, t + c$ pour tout $t \in [0; 1]$ donc $\varphi(t) = -\hat{g}(t) + k\, t + c$.

Remarquons de plus que toute fonction de la forme $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = -\hat{g}(t) + k\, t + c$ pour $t \in [0; 1]$ est solution de l'équation différentielle $f'' = g$ puisque $\varphi'' = -\left(\hat{g}\right)'' = -(-g) = g$.

On en déduit qu'une solution de l'équation différentielle $f'' = g$ est de la forme $\varphi(t) = -\hat{g}(t) + k\,t + c$ avec k et c constante réelle.
Pour que φ appartienne à E, il faut $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
Or $\varphi(0) = c$ d'où $c = 0$ et $\varphi(1) = k$ d'où $k = 0$.
Alors $\varphi(t) = -\hat{g}(t)$ pour tout $t \in [0; 1]$.

Il y a donc une unique solution appartenant à E à l'équation différentielle $f'' = g$, c'est la fonction $-\hat{g}$.

V. … et pour construire une suite

1. On pose, pour tout entier naturel n, $y_n = x_{2n+1}$.

Soit n un entier.

On a $y_{n+1} = x_{2(n+1)+1} = t(1 - x_{2(n+1)}) = t(1 - x_{2n+2}) = t(1 - (1-t)\,x_{2n+1}) = t(1 - (1-t)\,y_n)$.

Prouver l'existence de deux nombres réels α et β tels que, pour tout entier naturel n, on puisse écrire $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$.

On a $y_{n+1} = t(1 - (1-t)\,y_n) = t + (t^2 - t)\,y_n$.

On cherche des réels α et β tels que $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$ donc tels que $y_{n+1} = \beta(1-\alpha) + \alpha\, y_n$.

Il faut donc $\begin{cases} \alpha = t^2 - t \\ \beta(1-\alpha) = t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha = t^2 - t \\ \beta = \dfrac{t}{1 + t - t^2} \end{cases}$.

Pour tout réel $t \in [0; 1]$, α et β sont bien définis.

Pour α, c'est trivial, pour β, vérifions que $1 + t - t^2 > 0$ pour tout réel $t \in [0; 1]$.

On sait que pour tout réel $t \in [0; 1]$, $0 \le t^2 \le t$ d'où $t - t^2 \ge 0$ et donc $1 + t - t^2 \ge 1 > 0$.

Le réel β est bien défini pour tout réel $t \in [0; 1]$.

En posant $\alpha = t^2 - t$ et $\beta = \dfrac{t}{1 + t - t^2}$, on a alors $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$ pour tout entier naturel n, pour tout réel $t \in [0; 1]$.

2. Comme pour tout entier naturel n, $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$, alors la suite $((y_n - \beta))$ est géométrique de raison α et de premier terme $y_0 - \beta = t(1-t) - \dfrac{t}{1 + t - t^2} = \dfrac{-2\,t^3 + t^4}{1 + t - t^2} = -\dfrac{t^3(t-2)}{1 + t - t^2}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $y_n - \beta = (y_0 - \beta)\,\alpha^n$.

Or comme $t \in [0; 1]$, $-1 < t^2 - t \le 0$.

En effet la fonction $t \mapsto t^2 - t$ est une fonction du second degré dont les racines sont 0 et 1 et le coefficient des termes au carré est 1 donc on sait qu'elle est décroissante sur $\left[0; \dfrac{-1}{2\times(-1)}\right] = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

Ainsi elle admet un minimum égal à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$ sur $[0; 1]$ atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$ et est majorée par $0^2 = 0 = 1^2 - 1 = 0$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$ et ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n - \beta = 0$: par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$: la suite (y_n) est convergente et sa limite est $\beta = \dfrac{t}{1 + t - t^2}$.

3. Remarquons que $z_{n+1} = x_{2n+2} = (1-t)\,x_{2n+1} = (1-t)\,t(1 - x_{2n}) = (1-t)\,t(1 - z_n) = (t - t^2)\,(1 - z_n) = (t - t^2) + (t^2 - t)\,z_n$.

Déterminons des réels γ et δ tels que $z_{n+1} - \delta = \gamma(z_n - \delta)$.

Les réels γ et δ vérifient $z_{n+1} = \gamma\, z_n + \delta(1 - \gamma)$ et donc il faut $\begin{cases} \gamma = t^2 - t = \alpha \\ \delta = \dfrac{t - t^2}{1 + t - t^2} = (1-t)\,\beta \end{cases}$.

Les réels γ et δ sont bien définies.

La suite $(z_n - \delta)$ est géométrique de raison $\gamma = \alpha$ et de premier terme $z_0 - \delta = t - \dfrac{t - t^2}{1 + t - t^2} = -\dfrac{t^2(t-2)}{1 + t - t^2}$.

Alors pour tout entier naturel n, $z_n - \delta = (z_0 - \delta)\,\alpha^n$.

On déduit de la question précédente que (z_n) est convergente et a pour limite $\delta = (1-t)\,\beta$.

4. On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = (1-t)\,\beta$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \beta$.

Or si la suite (x_n) est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}$ donc il faut $(1-t)\,\beta = \beta$ d'où $t\,\beta = 0$ c'est à dire

$\dfrac{t^2}{1+t-t^2} = 0$ et donc $t = 0$.
Finalement, sauf pour $t = 0$, la suite (x_n) n'est pas convergente.