Épreuve de Mathématiques 2011

Concours d'entrée Sciences Politiques.

Durée de l'épreuve: 4 heures.

Le problème se compose de 2 parties.
Les calculatrices sont autorisées.
Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.
Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Le problème suivant est constitué de deux parties indépendantes entre elles.
Dans chaque partie, on étudie un exemple classique de loi de probabilité continue à densité.

Dans tous le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Première partie

Soit λ un nombre réel non nul.
On considère la fonction $f_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ est notée $\mathscr{C}_\lambda$.

A.1. Érudier les variations de la fonction f_λ suivant le signe de λ.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente $T_{\lambda,a}$ à la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ au point A d'abscisse a, avec a un nombre réel quelconque.

3.a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer selon le signe de λ, la position de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport à la tangente $T_{\lambda,a}$ au point A.

b. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ selon le signe de λ.

B.1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on note $\mathrm{A}_\lambda(\alpha)$ l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$, exprimée en unités d'aire.

a. Déterminer la valeur de $\mathrm{A}_\lambda(\alpha)$.

b. Déterminer, si elle existe , la limite de $\mathrm{A}_\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2.a. Justifier l'existence des écritures $I_\lambda(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha t\, f_\lambda(t)\, dt$ et $J_\lambda(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha t^2 f_\lambda(t)\, dt$.

b. Calculer la valeur de chacune de ces deux intégrales.
En déduire leurs limites respectives lorsque α tend vers $+\infty$, si elles existent.

C. On dit qu'une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$ si:

- pour tout réel x de $[0; +\infty[$, $f(x) \geq 0$;
- la fonction f est continue sur $[0; +\infty[$;
- la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, dt$ existe et est égale à 1.

On définit alors une loi de probabilité P sur $[0; +\infty[$ de densité f:

pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans $[0; +\infty[$, la probabilité de l'intervalle $[a; b]$ est $P([a; b]) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Un variable aléatoire X à valeurs dans $[0; +\infty[$ suit la loi de probabilité P si, pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans $[0; +\infty[$, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt$.

Dans la suite de cette partie **C.**, λ est un réel strictement positif et on considère la fonction $\varphi_\lambda : x \mapsto \lambda\, e^{-\lambda x}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1.a. Déduire de ce qui précède que φ_λ est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$.

b. Soit X_λ une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité φ_λ.
Reconnaître la loi suivie par X_λ.

2.a. On appelle espérance de X_λ, le réel noté $E(X_\lambda)$ défini par $E(X_\lambda) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\, \varphi_\lambda(t)\, dt$.

Justifier l'existence de la limite précédente et donner une expression simple de $E(X_\lambda)$ en fonction de λ.

b. Le temps d'attente en minutes à un standard téléphonique est une variable aléatoire Y_λ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
L'espérance $E(Y_\lambda)$ représente alors le temps moyen d'attente à ce standard.
Sachant que ce temps moyen est de 5 minutes, déterminer la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes.

3. On appelle variance de X_λ le réel noté $V(X_\lambda)$ défini par $V(X_\lambda) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t^2\, \varphi_\lambda(t)\, dt - [E(X_\lambda)]^2$.

Justifier l'existence de la limite précédente et déterminer une expression simple de $V(X_\lambda)$ en fonction de λ.

Deuxième partie

Soit λ un réel non nul arbitrairement fixé.
On considère la fonction $g_\lambda : x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ est notée Γ_λ.

A. Dans cette partie **A.**, plusieurs cas pourront être envisagés selon les valeurs du réel λ.

1. Faire une étude de la fonction g_λ: parité, limites, variations.

2.a. Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ.

On admet que la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable traverse sa tangente en un point A d'abscisse a si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en a en changeant de signe.

b. La courbe Γ_λ présente-t-elle des points où elle traverse sa tangente ?

c. Donner l'allure de la courbe Γ_λ.

B. On considère les fonctions $F_\lambda : x \mapsto \int_0^x e^{-\lambda t^2}\, dt$ et $F_1 : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

1.a. Rappeler l'argument permettant de justifier la dérivabilité de la fonction F_λ puis donner l'expression de $F_\lambda'(x)$, pour tout réel x.

b. En déduire que pour tout réel x, on a l'égalité: $F_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\; x\right)$.

2. Justifier que la fonction F_λ est impaire.

3. Étudier les variations de la fonction F_λ.

Dans la suite de la deuxième partie, on se place dans le cas où λ est strictement positif.

4.a. Montrer que, pour tout réel t supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, $g_\lambda(t) \leq e^{-t}$.

b. Montrer, que pour tout réel x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \leq \int_{\frac{1}{\lambda}}^x e^{-t}\, dt$.

En déduire que, pour tout réel x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) \leq F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Pour tout entier naturel strictement positif, on pose $u_n = F_\lambda(n)$.

c. Prouver que la suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite finie en $+\infty$, que l'on note L_λ.

On admet que la fonction F_λ admet également pour limite L_λ lorsque x tend vers $+\infty$.
De même, on peut poruver que F_1 admet une limite finie en $+\infty$ notée L_1.

d. Quelle relation existe-t-il entre L_λ et L_1 ?

e. Montrer que $0 \leq L_\lambda - F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

f. On suppose dans cette question $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Donner une valeur approchée de $L_{\frac{1}{2}}$ à e^{-2} près.

On admet dans la suite du problème que $L_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

g. Déterminer la valeur exacte de L_λ.

C. On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si:

- pour tout réel x, $f(x) \geq 0$;
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$;
- les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\, dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\, dt$ existent et sont finies, leur somme étant égale à 1.

On définit alors une loi de probabilité P sur $\mathbb{R}$ de densité f:

pour tout réel a, la probabilité de l'intervalle $]-\infty; a]$ est $P(]-\infty; a]) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\, dt$.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit la loi de probabilité P si, pour tout réel a, $P(X \leq a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\, dt$.

Soit la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.a. Préciser la parité de la fonction ψ.

b. Déduire de la partie **B.**, que la fonction ψ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité ψ .

(La loi suivie par X est appelée loi normale centrée réduite qui est très utilisée en statistiques et en probabilités.)

2. On appelle espérance de X le réel noté $E(X)$ défini par $E(X) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 t\,\psi(t)\,dt + \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt$.

Justifier l'existence des limites précédentes et calculer $E(X)$.

3.a. En s'aidant de la partie **B.** précédente, justifier que pour tout réel a supérieur ou égal à 2, la probabilité $P(2 \leq X \leq a)$ est majorée par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-2}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-2} \leq P(0 \leq X \leq 2) \leq \dfrac{1}{2}$ puis déterminer un encadrement de la probabilité $P(X < 2)$.

D. Lors de l'étude la loi normale centrée réduite, il est utile de s'intéresser aux limites de la forme $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt$ où n est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $\chi_n : x \mapsto x^n\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x positif, on pose alors $b_n(x) = \int_0^x \chi_n(t)\,dt$.

1. Calculer $b_1(x)$.

2.a. Montrer que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout réel x positif, $b_n(x) = -x^{n-1}\,e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\,b_{n-2}(x)$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $b_n(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, notée B_n .

c. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B_n = (n-1)\,B_{n-2}$.

d. Donner les valeurs de B_1, B_2, B_3 et B_4 .

3.a. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $B_{2k+1} = 2^k\,k!$ et $B_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{k+1}\,k!}\sqrt{2\pi}$.

b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt$ en fonction de n .

★★★★★ FIN DU PROBLÈME ★★★★★