Fonctions

Définitions & Généralités

I.Notion de fonctions.

Principes

Exemples: Processus d'association: "en fonction de" et "variables".

Exemple 1:

On considère:

• un sac E contenant un carré, un disque, une étoile à cinq branches, un rectangle non carrée, un triangle quelconque, un triangle rectangle, un triangle équilatéral.

• un sac F contenant les couleurs rouge, bleue, vert, jaune et blanc.

On définit alors le processus d'association suivant:

• aux quadrilatères, on associe la couleur bleue
• à l'étoile la couleur jaune
• aux triangles, la couleur rouge
• aux autres formes la couleur blanche.

On définit ainsi un processus d'association qui à chaque figure contenu dans le sac E, associe une couleur du sac F , **en fonction de** la forme de la figure.

Exemple 2: les jeux vidéo.

On considère un jeu vidéo dans lequel un héros se déplace dans un monde virtuel, y ramasse des objets ce qui lui rapporte des pièces d'or.

Ainsi lorsque le héros ramasse un champignon vert, il gagne 10 pièces, un champignon rouge, il gagne 20 points, un diamant, il gagne 50 points et un cœur, il gagne aussi 50 points.

On définit ainsi, **en fonction** de l'objet ramassé, un processus d'association qui à chaque objet associe le nombre de points correspondant.

Exemple 3:

On trouve dans la vie courante, tout un tas de processus d'association:

• la distance parcourue par un objet en mouvement en fonction du temps de parcours,
• le poids ou la taille d'un enfant en fonction de son age,
• le prix payé en fonction de la quantité achetée,
• le tarif des communications en fonction de la durée de communication,
• le tarif en fonction de la quantité de données téléchargées,
• chaque individu associé à son numéro d'INSEE (à partir de 18 ans, en France)
• la température en fonction des heures de la journée, des mois de l'année,…

Exemple 4: Avec des nombres

Considérons un programme de calcul:

• Choisir un nombre
• Lui ajouter 3
• Multiplier le résultat obtenu par -2

On définit ainsi un processus d'association qui à chaque nombre choisi associe le résultat du programme de calcul.

Comment représenter "en fonction de" ?

Les diagrammes de Venn ou en patates

………

………

………

………

Les tableaux

....

....

....

....

$\longrightarrow$ & $\longmapsto$ ou la notation $f(\dots) = \dots$

....

....

....

....

Définition

Définition

Soit E et F deux ensembles d'objets.
Tout processus d'association, noté f , d'un objet x de l'ensemble E à un **unique** objet y de l'ensemble F est appelé fonction définie sur l'ensemble E à valeurs dans l'ensemble F .
L'unique objet y associé à l'objet x par la fonction f est alors appelé l'**image** de l'objet x par la fonction f et se note $f(x)$.
L'ensemble E sur lequel est défini le processus d'association est appelé le domaine de définition ou l'ensemble de définition de la fonction f .
L'ensemble F est l'ensemble des images.
On utilise aussi pour imager, la notion d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée.

On lit $f(x)$: "image de x par f" ou"f de x" .
Les parenthèses dans l'écriture $f(x)$ ne sont pas des parenthèses de calcul !!
On ne peut pas dissocier f de (x) .

Notations:

On note d'une manière générale $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ ou $f : \left\{ \begin{array}{c} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right.$ une fonction, et lorsque les ensembles E et F sont sans ambiguité, on note simplement $f : x \mapsto f(x)$.
On lit: "soit f la fonction **définie** sur l'ensemble E à **valeurs** dans l'ensemble F, qui à tout objet x de l'ensemble E associe l'unique objet $f(x)$ de l'ensemble F par le processus f .

Pour noter l'image d'une nombre par une fonction f donnée, on peut écrire $f(x) = \square$ ou $f : x \mapsto \square$.

La flèche $\bullet \to \blacksquare$ indique d'un ensemble $\bullet$ dans l'ensemble $\blacksquare$, alors que la flèche $\circ \mapsto \square$ se lit "qui a $\circ$ associe $\square$".

Exemples:

....

....

....

....

....

....

Attention:

Tout processus n'est pas une fonction. La condition d'existence pour une fonction est l'image unique.

....

II. Fonctions numériques

Définition

Du cas général au cas numérique.

Le principe de fonctions décrit au paragraphe précédent s'applique lorsque l'ensemble de définition ainsi que l'ensemble des images sont l'ensemble des nombres.
On définit alors une fonction numérique (le résultat obtenu est un nombre) d'une variable numérique (l'objet de départ est aussi un nombre).

Ce sont **ces** fonctions **numériques d'une variable numérique** que nous étudierons (au collège et au lycée aussi d'ailleurs).

Simplification du vocabulaire.

On parle, par défaut, en donnant par exemple $f\ :\ x\ \mapsto\ 3\,x^2 - x + 1$, d'une fonction numérique d'une variable numérique.
Il est sous-entendu que x représente un nombre et que le résultat obtenu, son image $f(x)$ est aussi un nombre.
On utilisera par la suite « fonction » pour « fonction numérique »

Tableau de valeurs

Étant donné une fonction un tableau de valeurs d'une fonction est un tableau dont une ligne sont des valeurs de la variable, l'autre les valeurs des images correspondantes.

Des exemples sont donnés par la suite.

Image et antécédent

Exemple:

On considère une fonction g pour laquelle on sait que $g(3) = -5$ et $g(0) = \frac{2}{3}$.

On dit que le nombre 3 a pour ……………… le nombre …… par la fonction g ou que le nombre -5 est l'…………… du nombre …… par la fonction g .
On dit aussi que 3 est un …………………… du nombre -5 par la fonction g ou encore que ……… a pour ………………… le nombre …… par la fonction g .

On dit que le nombre …… a pour ………………… le nombre …… par la fonction …… ou que le nombre …… est l'……………… du nombre …… par la fonction …… .
On dit aussi que …… est un …………………… du nombre …… par la fonction …… ou encore que ……… a pour ………………… le nombre …… par la fonction …… .

Expression algébrique

Expression algébrique

Lorsque cela est possible, on donne pour définir une fonction numérique, le programme de calcul permettant d'associer à un nombre son image par le processus, sous la forme d'une expression littérale, dans laquelle la variable est toujours représentée par la même lettre.

Exemples:

……

……

……

……

Plusieurs expressions algébriques

Une même fonction peut avoir plusieurs expressions algébriques distinctes.

Exemple:
Écrire les expressions des fonctions des 2 programmes de calculs suivants, puis vérifier que les 2 programmes définissent la même fonction.

- choisir un nombre
- lui soustraire 5
- calculer le carré du résultat précédent
- soustraire 25 à ce dernier résultat

- choisir un nombre
- lui soustraite 10
- multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ

....

....

....

....

....

Calculs d'images (substitution de la variable)

Principe

Il s'agit de calculer la valeur obtenue en substituant la variable par une valeur donnée numérique.

Avec un tableau (lecture)

On définit la fonction h par la donnée du tableau de valeurs ci-dessous:

x	-1	0	0,5	1	2	10
$h(x)$	-2	4	3	4	2	1

Lire les images de 0 et 10: ....

Remarque:
On ne peut rien dire sur l'image de 5 par exemple. Ni sur celle d'un nombre qui n'est pas dans le tableau.

Avec une expression (calcul algébrique)

Soit la fonction $f : x \longmapsto f(x) = 3\,x(x-1) + 2$.

Calculons les images de 1, -2 et $\dfrac{1}{3}$.

....

....

....

....

Nombre sans image

Soit la fonction $i : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Déterminez un nombre qui n'a pas d'image par la fonction inverse i.

....

On dit que .... est une valeur .... pour la fonction inverse.

Dans un tableau de valeurs, on raye ou on noircit la case correspondant à l'image de ce nombre.

Calculs d'antécédents (résolution d'équations)

Principe

Étant donné un nombre choisi, la question est de savoir s'il existe une ou des valeurs de la variable dont l'image est égal à ce nombre.
Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction.
Étant donné un nombre k, existe-t-il une valeur de x telle que $f(x) = k$?
Il s'agit donc de **déterminer une solution d'une équation**.

Exemples

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto 2\,x - 3$.
Alors $f(1) = 2 - 3 = -1$ et donc 1 est un antécédent de -1 par la fonction f.

2. On considère la fonction carrée $c : x \longmapsto x^2$. On sait que $2^2 = 4$. Par conséquent, 2 est un antécédent de 4 par la fonction c.

Remarquons que $(-2)^2 = 4$ et donc -2 est aussi un antécédent de 4 par la fonction c

Un même nombre peut avoir plusieurs antécédents. Par conséquent, la prudence nous incite à parler d'**un** antécédent plutôt que de **l'**antécédent.

En devinant

On considère la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{3}{x}$.
Donner un antécédent de 1 par la fonction g : ....

Remarque:
Dévinez un antécédent ne permet pas d'assurer qu'il n'y en a pas d'autres. C'est donc un début, mais a priori insuffisant pour déterminer tous les antécédents d'un nombre.

Avec un tableau (par lecture)

On définit la fonction h par la donnée du tableau de valeurs ci-dessous:

x	-1	0	0,5	1	2	10
$h(x)$	-2	4	3	4	2	1

Lire le ou les antécédents de 2 et de 4 :

....

....

....

Avec une expression (calcul algébrique)

On considère la fonction $f : x \longmapsto 2\,x - 3$.

Déterminer par le calcul l'antécédent de 5 par la fonction f .

....

....

....

....

....

Nombre sans antécédent

Il peut y avoir plusieurs antécédents, comme il peut ne pas y en avoir.
Par exemple, un nombre négatif n'a pas d'antécédent par la fonction carrée: en effet un carré est toujours ....

III. Représentation graphique

Représentation graphique d'une fonction

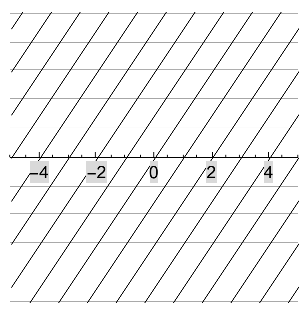
Repères du plan

Un repère du plan est la donnée de deux axes graduées sécants, dont le point d'intersection est appelé origine du repère.
L'un des axes (horizontal en général) est appelé l'axe des abscisses, l'autre l'axe de ordonnées.
Quand les deux axes sont perpendiculaires, le repère est dit orthogonal.
Quand les 2 axes ont la même unité, il est dit normé.
Quand les 2 axes sont perpendiculaires et ont la même unité, le repère est dit orthonormé ou orthonormal.

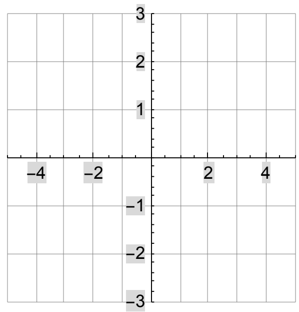
Tout point M du plan peut alors être associé à un couple de nombre, souvent noté $(x; y)$, appelé coordonnées du point dans le repère.
L'abscisse x du point dans le repère est l'abscisse du projeté H du point M, sur l'axe des abscisses, parallèlement à l'axe des ordonnées.
L'ordonnée y du point M dans le repère est l'abscisse du projeté K du point M, sur l'axe des ordonnées, parallèlement à l'axe des abscisses.

Exemples:
Dans les repères, ci-dessous lire les coordonnées des points donnés puis placer les points de coordonnées $(-1; 3)$, $(1,5\ ;\ 2,25)$ et $(3,1\ ;\ -2)$.

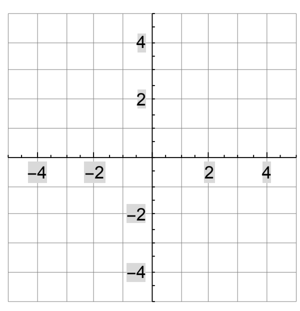
Repère oblique



Repère orthogonal



Repère orthonormal



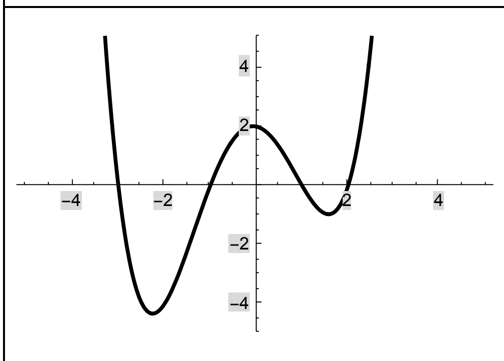
Principe

Il s'agit de se donner un outil géométrique, une représentation graphique, qui permette de comprendre, d'analyser, d'observer le phénomène variable qui est modélisé par la fonction.

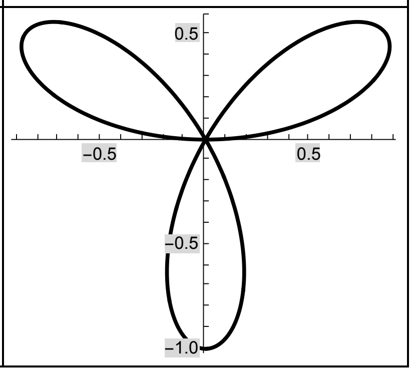
Pour une fonction, l'image est unique, alors en associant le couple de nombres (variable ; image) $= (x; y)$ au point correspondant dans un repère orthogonal, il vient une courbe, qui "ne revient pas" sur elle-même, quand on déroule la variable, sur l'axe des abscisses, de la gauche vers la droite, c'est à dire des nombres négatifs, vers les nombres positifs.

Exemples:

Courbe 1



Courbe 2



Définition

Soit f une fonction numérique.
La **représentation graphique** C de la fonction f est l'**ensemble des points du plan de coordonnées** $(x, f(x))$ dans un

repère orthogonal du plan.
La représentation graphique C de la fonction f est une **courbe** du plan.

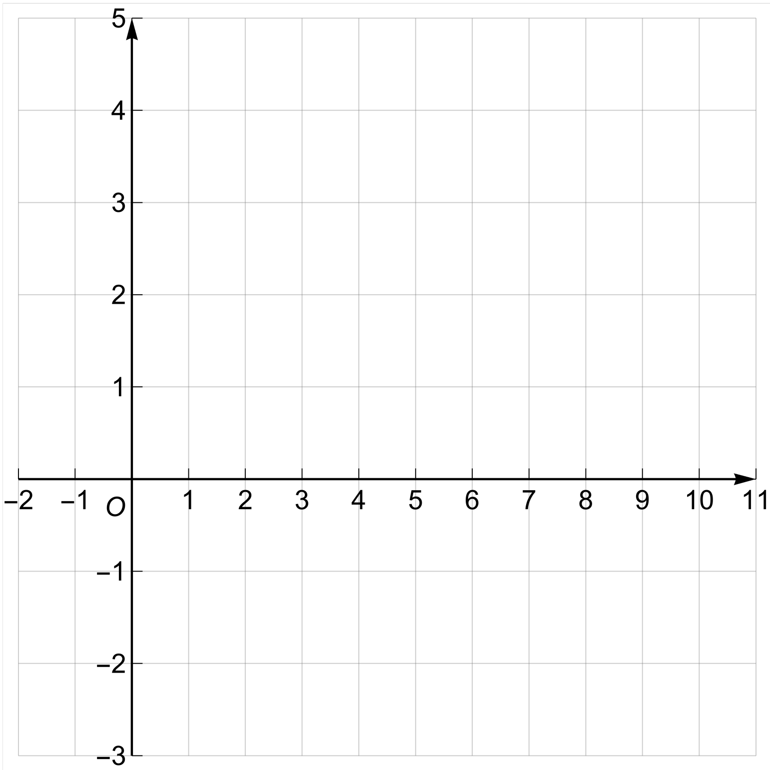
Sur l'axe des abscisses, on reporte donc les valeurs de la variable et sur l'axe des ordonnées la valeur de l'image correspondant à cette variable. Le point M est le point à l'intersection de la verticale passant par x et de l'horizontale passant par $f(x)$.

Tracé

Pour tracer une fonction, il faut un tableau de valeurs.

1^er^ cas: on donne le tableau de valeurs

x	-1	0	$0{,}5$	1	2	10
$h(x)$	-2	4	3	4	2	1



Notes:

....

....

2^e^ cas: on construit le tableau de valeurs

Dans ce cas, il faut connaître l'expression de la fonction.
Souvent, on construit un tableau de valeurs pour des valeurs de x régulièrement espacées. Cet espace régulier est appelé le **pas** de la table.

On donne la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3\,x - 4$.

Compléter le tableau de valeurs:

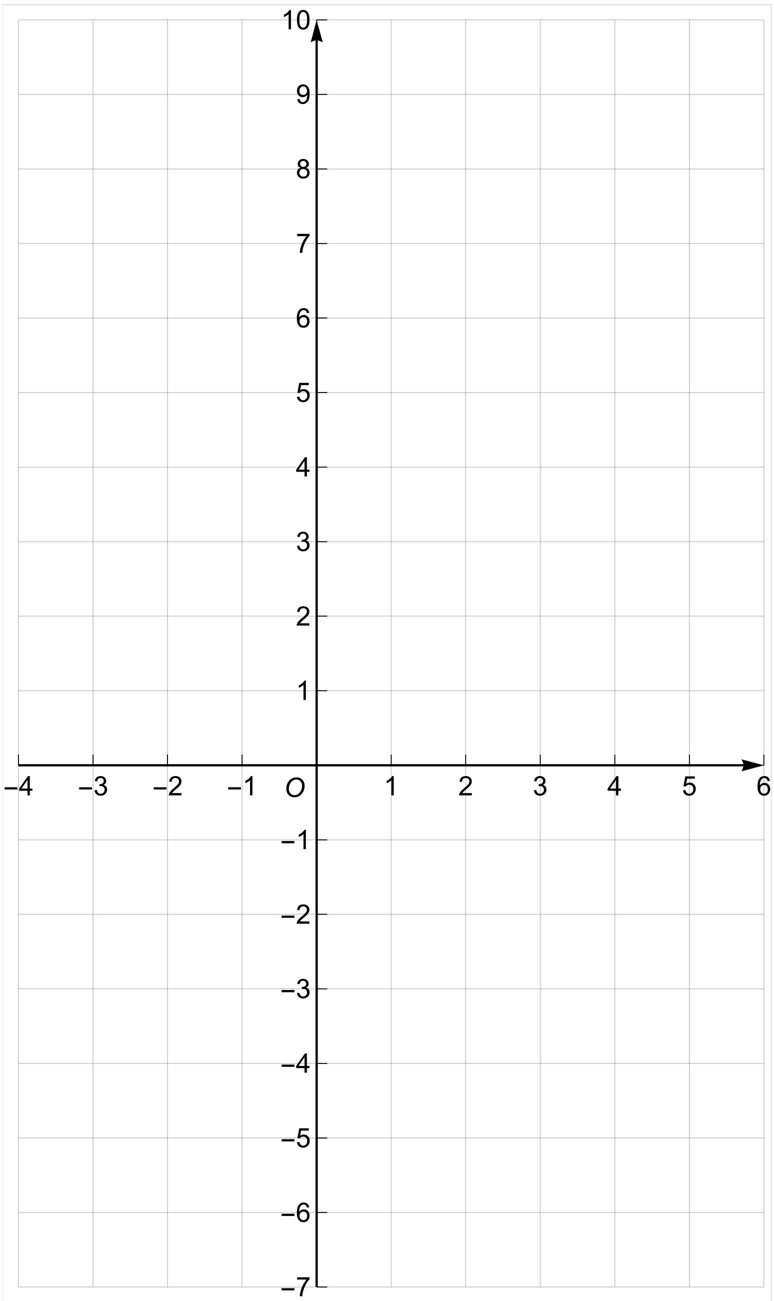
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									

Notes:

....

……………………………………………………………………………………

Construire la courbe représentative C de la fonction f dans le repère ci-dessous.



Notes:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

Consignes de tracé:

- une courbe se trace, en général, à **main levée**.
- les seules courbes que l'on trace **à la règle** sont les **droites** ou les courbes constituées de morceaux de droites.

IV. Lectures graphiques

Lectures graphiques: généralités

Principe

Il s'agit de déterminer en utilisant la représentation graphique d'une fonction, la réponse à une question donnée concernant le processus d'association défini par la représentation graphique:

- des valeurs
- décrire son évolution
- donner les particularités du processus: valeurs maximales, minimales, zéros, …

Consignes

On ne lit pas la même chose suivant la question posée.
Répondre à une question graphique, c'est indiquer précisément avec le vocabulaire adapté ce que l'on lit sur le graphique.

En général, et quand c'est possible, on porte sur le graphique des traits de construction, avec éventuellement une légende.

Attention

Une lecture graphique est a priori une démarche expérimentale.
De fait, les réponses données sont par principe, approchées.
On respecte ou la précision demandée par l'énoncé ou la précision permise par le graphique (cela dépend des graduations ou du quadrillage).
Les seules valeurs considérées exactes par convention sont:

- les valeurs des abscisses et des ordonnées à des noeuds du quadrillage;
- les valeurs indiquées par l'énoncé ou portées sur le graphique.

Notes:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

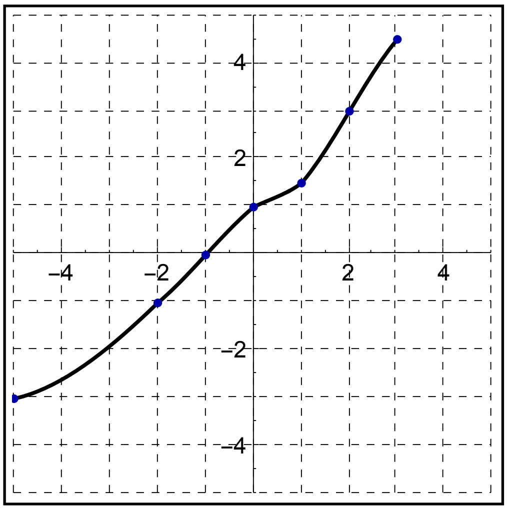
Lectures graphiques d'images

Principe

Il s'agit de déterminer en utilisant la représentation graphique d'une fonction, la valeur des images pour des valeurs données de la variable. On détermine $f(x)$ pour une valeur donnée de x.

Construction

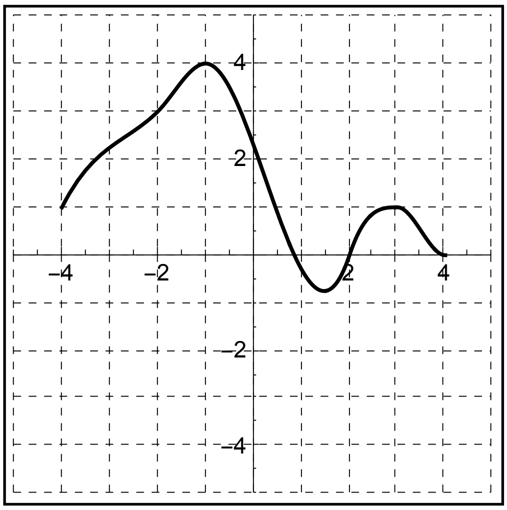
Lire l'image du nombre -1, puis celle du nombre 2 et enfin celle du nombre -4 par la fonction représentée ci-dessous.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Rédaction

Lire l'image du nombre -1, puis celle du nombre 2 et enfin celle du nombre -4 par la fonction représentée ci-dessous.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

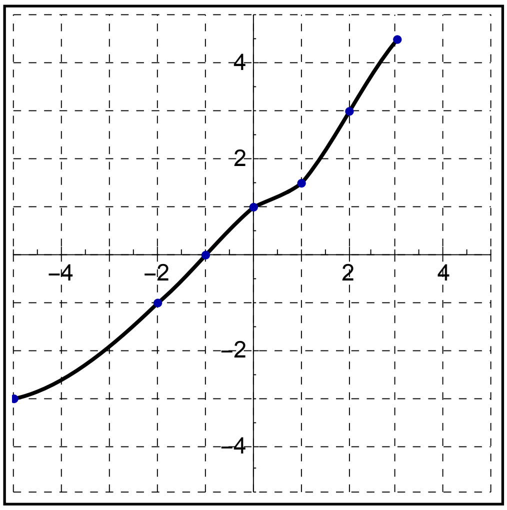
Lectures graphiques d'antécédents

Principe

Il s'agit de déterminer en utilisant la représentation graphique d'une fonction, la valeur des antécédents (x) pour une valeur donnée k par la fonction f.
Cela revient donc à résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$.

Technique

Lire le ou les antécédents du nombre -1 puis du nombre 2 par la fonction représentée ci-dessous.



Rédaction

Lire le ou les antécédents du nombre 2 par la fonction représentée ci-dessous.