Épiode 5: Isométries

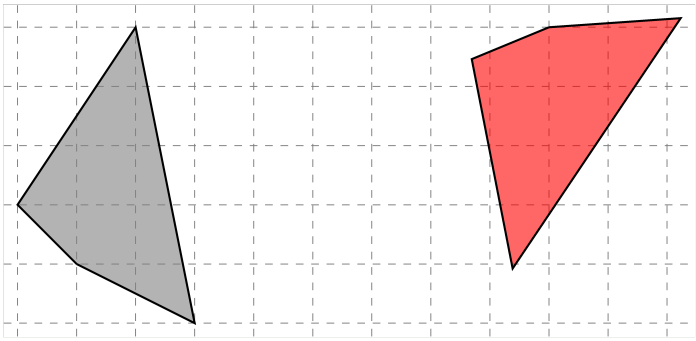
Déplacer sans transformer …

1. Isométries

1.1 Les figures isométriques

On s'intéresse ici à deux figures superposables. L'idée est donc qu'en décalquant par exemple une des figures, on peut amener le calque à se superposer à l'autre.
On dit alors que ces figures sont **isométriques**. ("iso": égal , "métrique": mesure).

Illustration: On a représenté ci-dessous, 2 figures isométriques.



Note: on lit aussi "figures égales".

Définition: Les éléments constitutifs de deux figures isométriques (sommets, côtés, …) se correspondent 2 à 2: ils sont dits **homologues**.

Propriété: 2 éléments **homologues** ont les **mêmes caractéristiques**.
Ainsi une paire de côtés homologues ont même longueur, une paire d'angles homologues ont même mesure.

Conséquence: 2 figures isométriques ont même périmètre, même aire.

1.2 Les isométries

Il s'agit d'étudier les transformations du plan, qui permettent d'obtenir des figures isométriques. **Une transformation du plan qui conserve les longueurs, sera appelée une isométrie.**

Note: les transformations du plan sont les fonctions du plan qui à un point du plan associe un autre point, son image.
On connaît aussi les projections ou les agrandissements-réductions qui ne conservent pas les longueurs.

Nous connaissons déjà les symétries centrales et les symétries axiales.

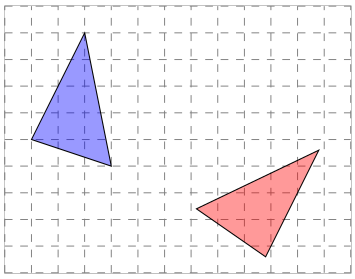
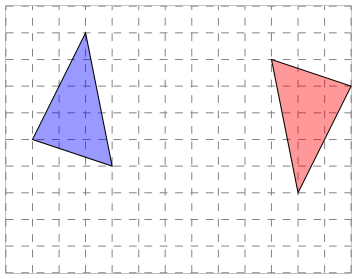
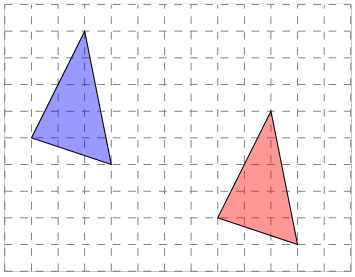
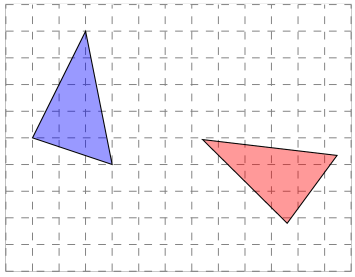
On décrit 2 autres isométries de référence (rotations et translations). Ces 4 isométries permettent en les enchaînant d'amener le calque à se superposer quand 2 figures sont isométriques.

Autrement dit, toute isométrie peut être décomposée en une ou plusieurs des 4 isométries décrites dans le paragraphe suivant.

Il est souvent compliqué de déterminer les éléments caractéristiques d'une isométrie, i.e. son découpage, pas nécessairement unique avec les isométries de référence.

On va se donner quelques outils fondamentaux, principalement les triangles, qui vont nous permettre de ne pas tenir compte au besoin de l'isométrie dans le détail. On utilise juste les éléments homologues des figures.

2. Les 4 isométries de référence

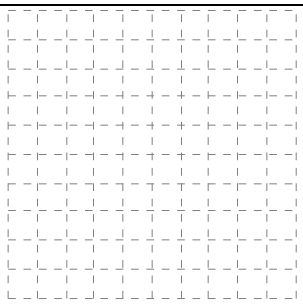
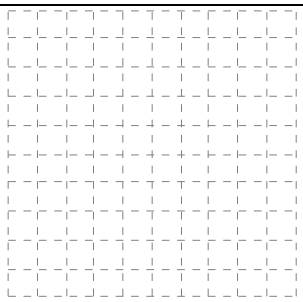
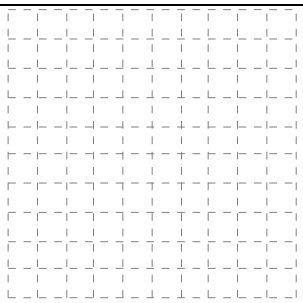
Isométrie:	**Symétrie axiale**	**Symétrie centrale**
Description:	Le miroir	Le retournement
Définition:	Un point M' est image du point M par la symétrie d'axe Δ si et seulement si Δ est la **médiatrice** du segment $[M\,M']$	Un point M' est image du point M par la symétrie de centre O si et seulement si Δ est la **milieu** du segment [M M']
Illustration:		
Éléments Caractéristiques	…… ……	…… ……
Propriétés Spécifiques	…… ……	…… ……
Isométrie:	**Translation**	**Rotation**
Description:	On glisse …	On tourne
Définition:	Un point M' est image du point M par la translation qui transforme A en B si et seulement si $A\,B\,M'\,M$ est un **parallélogramme**	Un point M' est image du point M par la rotation de centre O et d'angle α si et seulement si $O\,M = O\,M'$ et $M\,\hat{O}\,M' = \alpha$ (dans le bon sens)
Illustration:		
Éléments Caractéristiques	…… ……	…… ……
Propriétés Spécifiques	…… ……	…… ……

3. Triangles isométriques

Nous recherchons ici les conditions minimales qui permettent d'assurer que 2 triangles sont bien isométriques.

Les critères correspondent aux conditions minimales pour construire un triangle, on parlait alors de triangles constructibles.

On obtient les critères pour reconnaître des triangles isométriques:

Règle	***Illustration***	***Commentaires***
SSS: 3 longueurs égales		
SSA: • 2 longueurs égales, • angle adjacent de même mesure		Il faut absolument l'angle **adjacent** aux 2 côtés
SAA: • 1 longueur égale • 2 angles de même mesure		Dans un triangle quand on connaît 2 angles, on connaît le 3ième

ATTENTION: on peut être tenter d'utiliser 3 angles de même mesure (AAA). Cela ne suffit pas pour des triangles isométriques.
Par exemple, il suffit de comparer 2 triangles équilatéraux de côtés de longueurs différentes. Ils ont des angles égaux à 60°, ils sont semblables mais pas isométriques. C'est une autre transformation. On reconnaît un agrandissement-réduction.

4. Propriétés de conservation

La propriété fondamentale des isométries, i.e. de garder les longueurs intactes, est une propriété contraignante. Elle permet de conserver toutes les autres propriétés des figures concernées.

Théorème:

Toute isométrie (en particulier toue symétrie axiale, toute symétrie centrale, toute translation et toute rotation) **conserve**:

- les **longueurs**: l'image d'un segment est un segment de même longueur; en particulier, l'image d'un cercle est un cercle de même rayon.
- les **alignements**: les images de points alignés sont alignés, en particulier l'image d'une droite est une droite;
- les **milieux**: l'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image de ce segment;
- les **mesures d'angles**: l'image d'un angle est un angle de même mesure;
- le **parallélisme**: les images de deux droites parallèles sont parallèles;
- l'orthogonalité: les images de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires;