

Théorème de Thalès

Théorème & Réciproque

1. Le théorème de Thalès

Une situation de proportionnalité

On considère 2 droites d et d' sécantes en O . Soit A un point de d et B un point de d' distincts de O .

Placer des points M, P et X tels que $M \in [OA]$, $\begin{cases} P \in [OA) \\ P \notin [OA] \end{cases}$ et enfin $\begin{cases} X \in d \\ X \notin [OA) \end{cases}$.

Tracer les droites parallèles à la droite (AB) passant par M, P et X . On note N, Q, Y les intersections respectives de ces 3 droites avec la droite d' .

Figure:

.....

.....

.....

.....

.....

Calculs: Compléter en mesurant sur votre schéma:

$\frac{OM}{OA} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$\frac{ON}{OB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$\frac{MN}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$
$\frac{OP}{OA} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$\frac{OQ}{OB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$\frac{PQ}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$
$\frac{OX}{OA} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$\frac{OY}{OB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$\frac{XY}{AB} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$

Conclusion:

.....

Le théorème

Les configurations de Thalès

« Soit O, A, M et O, B, N des points alignés dans le **même ordre** » correspond à trois configurations du plan.

Deux droites sécantes en O , les points A et M sur l'une et les points B et N sur l'autre. Les configurations sont données par les positions des points M et N par rapport aux points O et A d'une part et O et B d'autre part.

Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3 Le papillon
$M \in [OA]$ et $N \in [OB]$	$M \in [OA)$ et $M \notin [OA]$ $N \in [OB)$ et $N \notin [OB]$	$M \in (OA)$ et $M \notin [OA)$ $N \in (OB)$ et $N \notin [OB)$

Théorème:

Soit O, A, M et O, B, N des points alignés dans le **même ordre**.

Si de plus, les droites (AB) et (MN) sont **parallèles**, alors on a l'égalité des rapports de longueurs:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}.$$

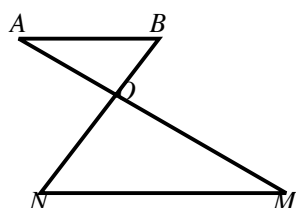
Dans tous les cas, ces égalités signifient que les longueurs des côtés des triangles OAB et OMN sont proportionnelles.

Les triangles ont la même forme, à une échelle différente. On parle alors d'**agrandissement-réduction**.

Le rapport de proportionnalité est souvent alors appelé **coefficient d'agrandissement** (> 1) ou **coefficient de réduction** (< 1).

Application: calculs de longueurs

On donne la figure suivante avec les dimensions indiquées: $LI = 6$ cm, $OL = 4,8$ cm et $OT = 8,4$ cm. On sait aussi que les droites (MN) et (AB) sont parallèles.



Solution:

.....

.....

.....

.....

.....

La contraposée

La contraposée n'est pas un théorème mais "une utilisation détournée" du théorème de Thalès.

Elle permet de démontrer que 2 droites **ne sont pas parallèles**.

En effet, si les égalités de rapport de longueurs ne sont pas vérifiées, alors que les points sont alignés, on peut assurer que les droites ne sont pas parallèles. Si elles l'étaient parallèles, le théorème de Thalès s'appliqueraient et les égalités seraient donc vérifiées.

Exemple:

On considère un triangle ABC tel que $AB = 7$, $AC = 5$.

Le point M est le point de $[AB]$ tel que $BM = 2$ et le point N est le point de $[AC]$ tel que $CN = 2$.

Justifier que les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

Solution:

.....

.....

.....

.....

.....

2. La réciproque du théorème de Thalès

Comment placer un point pour obtenir le parallélisme ?

On considère 2 droites d et d' sécantes en O . Soit A un point de d et B un point de d' distincts de O . Placer un point M sur d . Tracer plusieurs droites passant par M .

Figure:

.....

.....

.....

.....

.....

Calculs: Compléter en prenant les mesures sur votre schéma pour chaque point d'intersection obtenu.

$$\frac{OM}{OA} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots \quad \frac{O \text{ "Point d'intersection" }}{OB} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots\dots$$

Conclusion:

Application: Proposer une méthode pour placer précisément le point N tel que (MN) et (AB) sont parallèles. La réaliser sur votre figure.

.....

.....

.....

.....

Le théorème

Théorème:

Soit O, A, M et O, B, N des points alignés dans le même ordre.

Si de plus, on a l'égalité des rapports de longueurs: $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$, alors les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Figure:

.....

.....

.....

.....

Note:

L'égalité des rapports doit être vérifiée exactement (pas en valeur approchée).

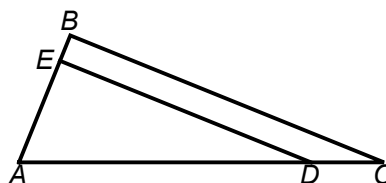
Attention, elle ne fait pas intervenir les longueurs des segments portés par les parallèles.

Application: montrer le parallélisme

Le dessin ci-contre n'est pas en vraie grandeur.

Il représente une figure géométrique pour laquelle on sait que:

- E est sur le segment $[AB]$ et D sur le segment $[AC]$,
- $AE = 2,4$ cm, $AB = 3$ cm, $AC = 8$ cm, $AD = 6,4$ cm.



Démontrer que les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

Solution:

.....

.....

.....

.....

Contre-exemple: alignement dans le même ordre

Construire la figure suivante:

- un triangle OAB tel que $OA = 9$ cm, $OB = 7$ cm et $AB = 6$ cm.
- Placer le point M tel que $M \in (OA)$ mais $M \notin [OA]$ avec $OM = 6,75$ cm.
- Placer le point N tel que $N \in [OB]$ et $ON = 5,25$ cm.

Vérifier que $\frac{ON}{OB} = \frac{OM}{OA}$. Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles ?

Solution:

.....

.....

.....

.....

Contre-exemple: Les bons rapports

Construire la figure suivante:

- Tracer une droite (OA) avec $OA = 9$ cm.
- Placer les points M et K sur (OA) tel que $\begin{cases} M \in [OA] \\ OM = 3 \text{ cm} \end{cases}$ et $\begin{cases} K \notin [OA] \\ OK = 3 \text{ cm} \end{cases}$.
- Placer un point B n'appartenant pas à (OA) tel que $AB = 6$ cm et $OB = 10$ cm.
- Placer les points N et L de (OB) tels que $\begin{cases} N \in [OB] \\ MN = 2 \text{ cm} \end{cases}$ et $\begin{cases} K \notin [OB] \\ KL = 2 \text{ cm} \end{cases}$.

Vérifier que $\frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$ et $\frac{ON}{OB} = \frac{KL}{AB}$.

Les droites (AB) et (MN) sont-elles parallèles ? Les droites (AB) et (KL) sont-elles parallèles ?

Solution:

.....

.....

.....

.....