Session 2: Les fractions

Quelques rappels

1. Le nombre fraction:

Fraction et quotient:

Définition:
Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres avec b non nul est le nombre tel que multiplié par b on obtienne a. On a donc l'égalité $b \times \frac{a}{b} = a$. a est le **dividende** et b le **diviseur**.

On dit souvent que le quotient $\frac{a}{b}$ est le nombre de fois où le nombre b rentre dans a.

Exemple:

Le quotient $\frac{0,3}{5}$, que l'on connaisse une autre écriture ou non (écriture décimale: $0,06$ ou écriture fractionnaire: $\frac{3}{50}$) est le nombre tel que $5 \times \frac{0,3}{5} = 0,3$.

Défnition:
Une fraction est le quotient de deux nombres entiers.
Le quotient $\frac{a}{b}$ est une fraction si a et b sont des entiers, avec b non nul.

Exemples:

⋆ Écriture fractionnaire: $\frac{1}{3}$; $\frac{57}{5}$; $\frac{-3}{41}$; $\frac{-4}{-30}$; …

⋆ Contre-exemples:

- $\frac{0,3}{5}$ n'est pas écrit sous forme fractionnaire, néanmoins on peut vérifier que $\frac{0,3}{5} = \frac{3}{50}$ et donc ce nombre $\frac{0,3}{5}$ est une fraction qui est ***«mal écrite»***.
- $\frac{\pi}{2}$ n'est pas écrit sous forme fractionnaire, et ne pourra jamais être écrit sous forme fractionnaire.

Il existe plein de nombres comme π qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions. Nous en découvrirons d'autres en troisième puis d'autres encore au lycée.

Les nombres **entiers** sont des fractions: $1 = \frac{1}{1}$; $-2 = \frac{-2}{1}$; …. Ce sont les fractions de dénominateurs 1.

Définition:

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ où a est un entier relatif et n un entier naturel (positif ou nul).
Tout nombre décimal admet une écriture fractionnaire.

■ **Point méthode:**

⋆ Pour écrire un nombre décimal en forme fractionnaire il suffit de l'écrire avec la puissance de 10 qui coorrespond à son nombre de chiffres après la virgule: $34,0543 = \dfrac{340\,543}{10\,000} = \dfrac{340\,543}{10^4}$.

⋆ Pour justifier si un nombre est un nombre décimal, on essaye de l'écrire sous la forme d'un entier divisé par une puissance de 10.

Ainsi par exemple $\dfrac{0,3}{5} = \dfrac{3}{50} = \dfrac{6}{100} = \dfrac{6}{10^2}$ donc est un nombre décimal.

Par contre $\dfrac{3}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

En effet si on cherche un **entier** k tel que $\dfrac{3}{7} = \dfrac{a}{10^n}$, on n'en trouve pas. Il faudrait que 7 divise 10.

Définition:
L'ensemble des fractions est appelé l'ensemble des **nombres rationnels**. Il contient tous les entiers, naturels et relatifs ainsi que tous les décimaux.

Recherche: Pourquoi rationnel?

Différentes significations:

Une fraction $\dfrac{a}{b}$ peut représenter:

⋆ proportion: numérateur et dénominateur renvoient à des grandeurs de natures différentes.

4 personnes malades parmi 100: $\dfrac{4}{100}$ de malades parmi la population ou 4 pour cent, $\dfrac{80\text{ km}}{1\text{ heure}} = 80\text{ km/h}, \ldots$

⋆ rapport: le numérateur et le dénominateur renvoient à des grandeurs de même nature

Ton frère à la moitié de ton âge: $\dfrac{\text{l'âge de ton frère}}{\text{ton âge}} = \dfrac{1}{2}$,

⋆ partition: le numérateur est une grandeur et le dénominateur sans dimension.

On partage 13 mm en 4: chaque morceau mesure $\dfrac{13}{4}$ mm.

⋆ le fractionnement de l'unité:

$\dfrac{4}{5}$ = 4 cinquièmes: on considère 4 “morceaux” de 1 cinquième, c'est à dire de l'unité divisée par 5.

Différentes écritures

Un même nombre peut avoir **plusieurs écritures**: l'écriture décimale ou l'écriture fractionnaire.

$2 = 2,0 = \dfrac{2}{1}$ $\qquad$ $34,05 = \dfrac{3405}{100}$

Néanmoins certains nombres n'admettent pas d'écriture décimale: $\frac{1}{3}, \frac{20}{11}, \frac{3}{7}, \ldots$

Dans ce cas **on doit travailler avec l'écriture fractionnaire**.

Valeurs approchées et valeurs exactes

Dans les calculs, sauf explicitement demandé, on attend au résultat une valeur exacte.

Par conséquent, à moins que toutes les fractions du calcul puissent être écrites sous forme décimale, on est obligé de travailler avec les fractions.

On distingue: l'arrondi, la troncature, la valeur approchée par excès, la valeur approchée par défaut et la précision: à l'unité, au dixième, au centième, …

Rappelons l'**ordre de grandeur** : déterminer une valeur aussi proche que possible aussi vite que possible. L'ordre de grandeur n'est pas une valeurs approchées à proprement parler.

Exemples:

$A = \frac{3}{5} + 2 - \frac{1}{10} = 0,6 + 2 - 0,1 = 2,5$ est correct.

$B = \frac{5}{3} + 2 - \frac{1}{10} = 1,666\,666 + 2 - 0,1$ n'est pas correct en valeur exacte, et ce quel que soit le nombre de 6!!!

$B = \frac{50}{30} + \frac{60}{30} - \frac{3}{30} = \frac{107}{30}$ qui n'est pas un nombre décimal.

2. Règle fondamentale des fractions

Règle

Propriété fondamentale:

Pour tous nombres a, b, c et d avec b et d non nuls, on a: $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$ (on peut noter $\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}} = \frac{a}{b}$)

Autre lecture (produit en croix):

Les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si $a\,d = b\,c$.

On traduit par le produit en croix le fait que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors il existe un entier k tel que $\begin{cases} c = a\,k \\ d = a\,k \end{cases}$ ou $\begin{cases} c = a/k \\ d = b/k \end{cases}$. On est dans une situation de proportionnalité.

Conséquence:

Une fraction admet une infinité d'écritures fractionnaires distinctes.

Ainsi $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30} = \frac{2 \times k}{3 \times k}$.

Signe

Propriété:

Pour tous nombres, a et b avec b non nul, $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Ainsi $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$ $\frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.

Comparaison de fractions

2 fractions de même dénominateur sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.

Comme $5 < 7$ alors $\frac{5}{13} < \frac{7}{13}$.

2 fractions de même numérateur sont rangées dans l'ordre inverse de leur dénominateur.

Ainsi comme $5 < 7$, alors $\frac{13}{5} > \frac{13}{7}$.

1 fraction dont le denominateur est inférieur au numérateur est inférieure à 1: $5 < 13$ donc $\frac{5}{13} < 1$.

1 fraction dont le denominateur est supérieur au numérateur est inférieure à 1: $5 < 13$ donc $\frac{13}{5} < 1$.

- **Point méthode:**

Pour le cas général:
Pour comparer 2 fractions, on compare des fractions égales aux deux fractions de même dénominateur.

Exemple:

Comparons les fractions $\frac{9}{20}$ et $\frac{19}{41}$.

On a $\frac{9}{20} = \frac{9\times41}{20\times41} = \frac{369}{820}$ et $\frac{19}{41} = \frac{19\times20}{41\times20} = \frac{380}{820}$ alors comme $369 < 380$, on en déduit que $\frac{9}{20} < \frac{19}{41}$.

Simplification/ réduction de fractions

Simplifier une fraction c'est l'écrire sous une forme fractionnaire dont le dénominateur et le numérateur sont plus petits.

Ainsi $\frac{4}{6}$ est une fraction simplifiée de $\frac{20}{30}$.

En général on cherche la fraction la plus simplifiée possible. On parle de la forme **irréductible**, c'est à dire que l'on ne peut plus réduire ni simplifier.

On essaye toujours de donner le résultat final d'un calcul sous la forme irréductible.

- **Point méthode:**

Simplifions la fraction $\frac{364}{390}$.

On cherche un diviseur commun aux 2 dénominateurs: ici 2 convient puisque les 2 nombres sont pairs.

On obtient $\dfrac{364}{390}=\dfrac{2\times 182}{2\times 195}=\dfrac{182}{195}$.

On utilise les critères de divisibilité (par 2, par 3, …) et puis il faut essayer …

On verra dans un prochain chapitre un algorithme (méthode systématique) pour simplifier les fractions.

On a $\dfrac{364}{390}=\dfrac{182}{195}=\dfrac{14\times 13}{15\times 13}=\dfrac{14}{15}$.

3. Addition et soustraction de fractions

Addition de 2 fractions de même dénominateur

Propriété:

Pour tous nombres a, b et c avec c non nul, on a $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}$ et $\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{c}=\dfrac{a-b}{c}$.

Exemple:

$\dfrac{29}{5}+\dfrac{6}{5}=\dfrac{29+6}{5}=\dfrac{35}{5}=7$ $\quad$ $\dfrac{3}{11}-\dfrac{15}{11}=\dfrac{3-15}{11}=-\dfrac{12}{15}$ $\quad$ $-\dfrac{2}{23}-\dfrac{9}{23}=\dfrac{-2-9}{23}=-\dfrac{11}{23}$

Addition de 2 fractions quelconques

On ne sait pas additionner directement 2 fractions de dénominateurs différents. On se ramène au cas précédents en utilisant la propriété fondamentale des fractions.

Pour additionner 2 fractions:

- ★ on réduit ces fractions au même dénominateur
- ★ on additionne les fractions de même dénominateur
- ★ on simplifie le résultat, si nécessaire.

Exemples:

$A=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}=\dfrac{5}{15}+\dfrac{12}{15}=\dfrac{5+12}{15}=\dfrac{17}{15}$ $\quad$ $B=\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{7}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{105}{84}-\dfrac{36}{84}+\dfrac{14}{84}=\dfrac{105-36+14}{84}=\dfrac{83}{84}$

Remarque:

Il faut déterminer un dénominateur commun aux fractions, c'est à dire un multiple commun des dénominateurs des termes de la somme.

On essaye a priori de trouver le plus petit.

Néanmoins, on peut toujours utiliser le produit des dénominateurs.

$\dfrac{3}{12}-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{3\times 7\times 15}{12\times 7\times 15}-\dfrac{4\times 12\times 15}{7\times 12\times 15}+\dfrac{2\times 12\times 7}{15\times 12\times 7}$: on peut remarquer que tous les dénominateurs sont égaux à $12\times 7\times 15=1260$. Cela convient.

On obtient $\dfrac{3}{12}-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{315-720+168}{1260}=-\dfrac{237}{1260}$.

On aurait pu choisir un dénominateur commun plus petit: $420\ (=1260/3)$ et on obtient $\dfrac{3}{12}-\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{15}=-\dfrac{79}{420}$.

4. Multiplication et division de fractions

Multiplication

Propriété:

Pour tous nombres a, b, c et d avec c et d non nuls, on a: $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a\,b}{c\,d}$.

Le produit de 2 fractions est égal à la fraction du produit des numérateurs et du produit des dénominateurs.

Cas particulier: $\boldsymbol{a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b}$.

Rappelons que $a = \frac{a}{1}$ donc cette égalité peut se lire comme $\frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{1 \times c} = \frac{a \times b}{c \times 1} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{1}$.

Néanmoins on va en général directement au résultat sans passer par cette étape!

Le calcul $\frac{a}{c} \times b$ est l'expression mathématique de « **prendre la fraction** $\frac{a}{c}$ **de la quantité** $\boldsymbol{b}$ ».

Par exemple: les 2 tiers des 27 élèves d'une classe de troisième ont un smartphone.

Donc $\frac{2}{3} \times 27 = 2 \times \frac{27}{3} = 18$ élèves ont un smartphone.

Inverse

Définition:

L'inverse d'un nombre non nul a, est le nombre noté $\frac{1}{a}$ tel que $a \times \frac{1}{a} = 1$.

Exemples:

L'inverse de 0,3, s'écrit $\frac{1}{0,3}$ et est égal à $\frac{10}{3}$ puisque $0,3 \times \frac{10}{3} = 1$.

Propriété:

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$. On a donc $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

Exemples:

On a clairement $\frac{3}{7} \times \frac{7}{3} = \frac{3 \times 7}{7 \times 3} = 1$ donc $\frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{7}{3}$.

Quotient de 2 fractions

Propriété:
Le quotient d'un nombre a par un nombre b est égal au produit du nombre a par l'inverse du nombre b. On a donc $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Exemple: en effet on a bien $b \times \frac{a}{b} = a$ et $b \times a \times \frac{1}{b} = b \times \frac{1}{b} \times a = 1 \times a = a$ donc $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Ainsi $4,5 \times \frac{3}{2} = 4,5 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{13,5}{2} = 6,75$.

Propriété:
Le quotient d'une fraction par une autre fraction est égal au produit de la première par l'inverse de la seconde.

On a donc $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \dfrac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Exemples:

$A = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{5} \times \dfrac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$ $\qquad B = \dfrac{5}{\frac{11}{4}} = 5 \times \dfrac{1}{\frac{11}{4}} = 5 \times \frac{4}{11} = \frac{20}{11}$

$C = \dfrac{\frac{5}{11}}{4} = \dfrac{\frac{5}{11}}{\frac{4}{1}} = \frac{5}{11} \times \dfrac{1}{\frac{4}{1}} = \frac{5}{11} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{11 \times 4} = \frac{5}{44}$

Remarques:

★ **Attention!!** $\dfrac{5}{\frac{11}{4}} \neq \dfrac{\frac{5}{11}}{4}$!! Placer la barre de fraction principale au niveau du signe égal.

★ Dans la pratique on écrit directement $\dfrac{\frac{5}{11}}{4} = \dfrac{5}{11 \times 4} = \dfrac{5}{44}$.

5. Exemples de calculs enchaînés

Principes:

Des calculs enchaînés avec des fractions se traitent comme des calculs enchaînés sans fractions:

- ★ Calculs entre parenthèses (ou crochets), en commençant par les parenthèses les plus intérieures
- ★ Multiplication et division
- ★ Addition et soustraction

Lorsque le calcul ne comporte ou que des multiplications et divisions ou que des additioins et des soustractions on

procède **de la gauche vers la droite**.
Rappelons néanmoins que dans un calcul ne contenant que des multiplications ou que des additions, l'ordre n'a pas d'importance.

Attention: La barre de fraction implique une priorité.

Ainsi $\dfrac{4+2\times7}{7-3}=\dfrac{(4+2\times7)}{(7-3)}$ et de même $\dfrac{\frac{1}{3}+1}{\frac{4}{3}-\frac{7}{9}}=\dfrac{\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{9}\right)}$.

Exemples

Conseils: Il faut procéder pas à pas et noter les étapes fondamentales.
Ne pas hésiter à effectuer quelques calculs intermédiaires sur un brouillon pour éviter d'écrire trop de "petits" calculs qui encombrent la compréhension générale.
Respecter chaque étape: priorités et méthodes adaptées à chaque opération!

$$A=\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}-\frac{10}{9}\right)+\frac{3+\frac{1}{2}}{\frac{-4}{5}+\frac{7}{5}}$$

$$A=\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{9}-\frac{10}{9}\right)+\frac{\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}$$

$$A=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{6}{9}\right)+\frac{7}{2}\times\frac{5}{3}$$

$$A=-\frac{3\times6}{4\times9}+\frac{7\times5}{2\times3}$$

$$A=-\frac{1}{2}+\frac{35}{6}$$

$$A=-\frac{3}{6}+\frac{35}{6}$$

$$A=\frac{32}{6}$$

$$A=\frac{16}{3}$$

$$B=4\times\frac{1+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}}$$

$$B=4\times\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}$$

$$B=4\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{5}$$

$$B=\frac{4\times4}{5}$$

$$B=\frac{16}{5}$$

$$C=1+\frac{2}{3+\frac{4}{5+\frac{6}{7}}}$$

$$C=1+\frac{2}{3+\frac{4}{\frac{41}{7}}}$$

$$C=1+\frac{2}{3+4\times\frac{7}{41}}$$

$$C=1+\frac{2}{\frac{3\times41+28}{41}}$$

$$C=1+\frac{2}{\frac{151}{41}}$$

$$C=1+2\times\frac{41}{151}$$

$$C=\frac{151+82}{151}$$

$$C=\frac{233}{151}$$