AP TS: résumé algorithme suites

1. Calculer le terme u_n de rang n

L'algorithme

On a une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

On cherche à calculer un terme de rang donné, a priori grand …

En langage naturel:

	Instructions
Entrées	variable entière N: à demander à l'utilisateur
	variable entière compteur i: à initialiser à 0
	variable réelle u: à initialiser à u_0
Traitement	TANT QUE $i < N$ FAIRE
	AFFECTER $f(u)$ à u
	AFFECTER $i+1$ à i
Sortie	AFFICHER u

	Instructions
Entrées	variable entière N: à demander à l'utilisateur
	variable entière compteur i: à initialiser à 0
	variable réelle u: à initialiser à u_0
Traitement	POUR i ALLANT de 0 à $N-1$ FAIRE
	AFFECTER $f(u)$ à u
	AFFECTER $i+1$ à i
Sortie	AFFICHER u

On obtient pour les calculatrices:

	TI 89	TI Nspire	TI 82, 83, 84	Casio
variable	n, i entiers u réel	n, i entiers u réel	N, I entiers U réel	N, I entiers U réel
entrée	Prompt n	nom (n)	Prompt N	"N"? → N
traitement	0 STO i u_0 STO u While i < N f (u) sto u i + 1 sto i EndWhile	0 STO i u_0 STO u While i < N f (u) sto u i + 1 sto i EndWhile	0 → I u_0 → U While i < N f (U) sto U I + 1 sto I WhileEnd	0 → I u_0 → U While I < N f (U) → U I + 1 → I WhileEnd
sortie	Disp u	Disp u	Disp U	U ▹ : Stop

Notes:

• On peut déclarer les variables dans le programme. Il pourra arriver que cela devienne nécessaire dans certains cas. Pour des “petits” programmes, normalement la machine se débrouille.
Attention néanmoins, pour les casio et TI 82-83-84, utilisez des majuscules.
Sinon les variables X, T, n, u, v, w et quelques autres sont utilisées par la machine et ne peuvent être employé pour les programmes.
Remarquez que pour un programme, une variable peut porter un nom quelconque non nécessairement réduit à une lettre.

Réaliser ce programme avec la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0,2 \\ u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$ puis la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1000 \\ v_{n+1} = 1,01\, v_n + 300 \end{cases}$.

Question 1? Et si on écrit “AFFICHER u” dans la boucle? Essayez et interpréter.

Question 2 ? Et si on écrit $i \leq N$ au lieu de $i < N$, que se passe-t-il ? Quelle conclusion doit-on en tirer ?

2. Déterminer le rang n tel que $|u_n - l| < \epsilon$ ou $|u_n| > M$

L'algorithme

On a une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. On suppose que l'on sait (ou conjecture) que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$.

On cherche le rang à partir duquel les termes de la suite sont aussi proches que l'on veut de cette limite l ou bien aussi grand que l'on veut ("proche de $+\infty$ ou $-\infty$").

Cette fois, on cherche le rang. Donc à la sortie, il faut le rang cherché. La variable à donner est la précision ϵ voulue.

De même, on va réitérer le calcul des termes consécutifs de la suite, mais la condition ne porte plus sur le rang, comme dans le cas précédent, mais sur les valeurs de u calculées.

On obtient:

	Instructions
Entrées	variable réelle M: à demander à l'utilisateur
	variable entière compteur i: à initialiser à 0
	variable réelle u: à initialiser à u_0
Traitement	TANT QUE $\lvert u \rvert < M$ FAIRE
	AFFECTER $f(u)$ à u
	AFFECTER $i+1$ à i
Sortie	AFFICHER i

	Instructions
Entrées	variable réelle ϵ: à demander à l'utilisateur
	variable entière compteur i: à initialiser à 0
	variable réelle u: à initialiser à u_0
Traitement	TANT QUE $\lvert u - l \rvert > \epsilon$ FAIRE
	AFFECTER $f(u)$ à u
	AFFECTER $i+1$ à i
Sortie	AFFICHER i

★ Rang à partir duquel $|u_n| \geq M$: suite divergente en $\pm\infty$:

On a une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. On suppose que l'on sait (ou conjecture) que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$.

On cherche le rang à partir duquel les termes de la suite sont aussi grand que l'on veut en valeur absolue donc ou $u_n > M$ ou $u_n < M$ où M est une constante choisie.

Dans le programme ci-dessous, on considère une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

	TI 89	TI Nspire	TI 82, 83, 84	Casio
variable	rang entier u, val réels	rang entier u, val réels	I entier U, M réels	I entier U, M réels
entrée	Prompt val	nom (val)	Prompt M	"M"? → M

traitement	0 STO rang
	u_0 STO u
	While u < val
	  f (u) sto u
	  rang + 1 sto rang
	EndWhile
		0 STO rang
		u_0 STO u
		While u < val
		  f (u) sto u
		  rang + 1 sto rang
		EndWhile
			0 STO I
			u_0 STO U
			While U < M
			  f (U) sto U
			  I + 1 sto I
			WhileEnd
				0 → I
				u_0 → U
				While U < M
				  f (U) → U
				  I + 1 → I
				WhileEnd

sortie	Disp rang	Disp rang	Disp I	I ▷ : Stop

Application:
La population mondiale actuelle est d'environ 7, 13 milliards en 2015.
On estime une croissance moyenne de 1, 14 % par an.
Si la croissance se maintient, en quelle année dépasserait-on 20 milliards? 50 milliards ? 100 milliards ?

ATTENTION: un tel programme pourrait tourné indéfiniment si la suite ne dépasse jamais M. En général, on ajoute une condition sur le rang, qui permet au calcul de s'arrêter si on ne trouve rien.

On adapte ce programme en $-\infty$ en remplaçant $u > M$ par $u < M$!

★ Rang à partir duquel $|u_n - l| < \epsilon$: suite convergente vers l

On a une suite (u_n) définie par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. On suppose que l'on sait (ou conjecture) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

On cherche le rang à partir duquel

	TI 89	TI Nspire	TI 82, 83, 84	Casio
variable	rang entier u, val réels	rang entier u, val réels	I entier U, M réels	I entier U, M réels
entrée	Prompt val	nom (val)	Prompt M	"M" ? ⟶ M

traitement	0 STO rang
	u₀ STO u
	While Abs (u − l) > val
	   f (u) sto u
	   rang + 1 sto rang
	EndWhile
		0 STO rang
		u₀ STO u
		While Abs (u − l) > val
		   f (u) sto u
		   rang + 1 sto rang
		EndWhile
			0 STO I
			u₀ STO U
			While Abs (U − l) > val
			   f (U) sto U
			   I + 1 sto I
			WhileEnd
				0 ⟶ I
				u₀ ⟶ U
				While Abs (U − l) > val
				   f (U) ⟶ U
				   I + 1 ⟶ I
				WhileEnd

sortie	Disp rang	Disp rang	Disp I	I ▹ : Stop

Application:

★ Une balle rebondissante rebondit à 90% de sa hauteur. On la lâche à 1m du sol. Au bout de combien de rebond, la hauteur du rebond est-elle inférieure ou égale à $\frac{1}{1000}$ de la hauteur de départ ?

★ On considère la suite (u_n) de la partie 1. Conjecturer sa limite puis déterminer à partir de quel rang on a $|u_n - l| < 10^{-4}$.

ATTENTION: un tel programme pourrait tourné indéfiniment si la suite ne ne se rapproche pas de *l*. En général, on ajoute une condition sur le rang, qui permet au calcul de s'arrêter si on ne trouve rien.