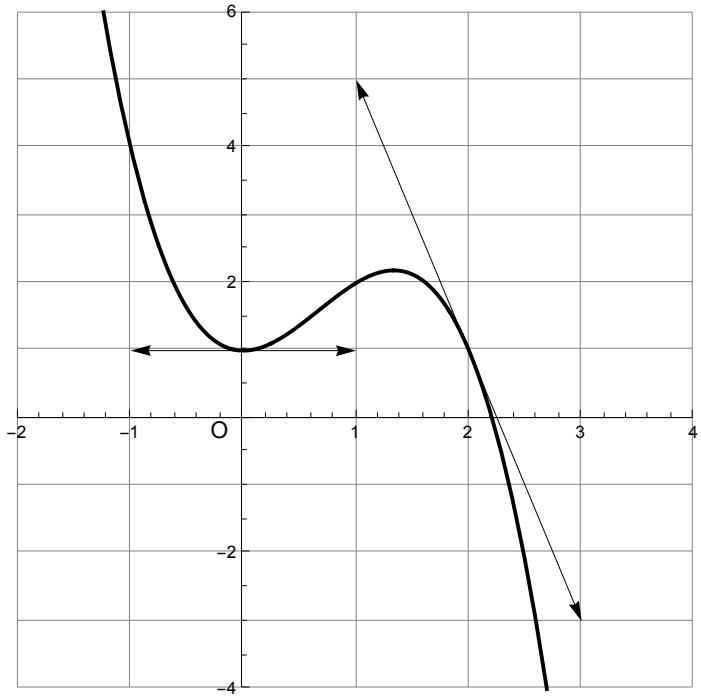
Episode 2: Exercices (1)

Exercice 1

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Déterminer graphiquement:

1. $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$

2. Le nombre de solutions de l'équation:
a. $f(x) = 2$ **b.** $f(x) = -2$ **c.** $f(x) = 1$ **d.** $f(x) = x$

3. $f'(0)$, $f'(2)$

4. Donner une valeur approchée de $f'(1)$.

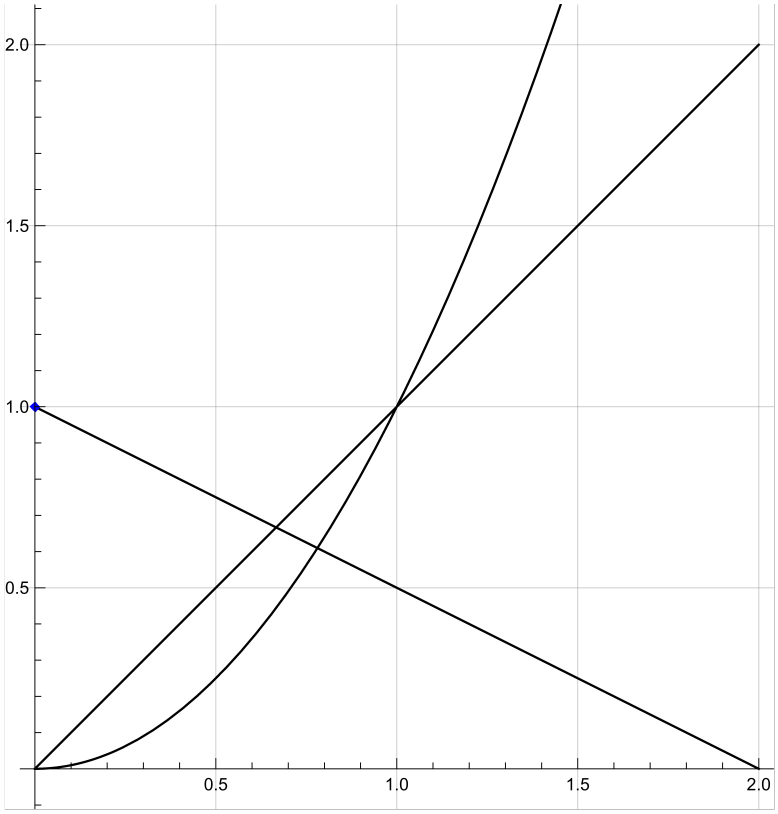
5. Déterminer le signe de $f'(x)$

6. On admet que la fonction f a une expression de la forme $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ et on sait de plus que $f'(1) = 1$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.

□

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ et la fonction $u : x \mapsto -2x + 1$.
Ces 2 fonctions sont représentées dans le repère ci-dessous.
On cherche à construire géométriquement la fonction $g : x \mapsto (-2x + 1)^2$.



□

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$.

1.a. Donner l'expression de la fonction u telle que $f(x) = \sqrt{u(x)}$.

b. Vérifier que $u(x) = f(x) \times f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2.a. En utilisant la formule de dérivation d'un produit déterminer une expression de $f'(x)$.

b. Vérifier, à l'aide de la calculatrice, que la dérivée obtenue permet d'établir les variations de f .

3. Peut-on généraliser aux fonctions de la forme $x \mapsto \sqrt{u(x)}$.

□

Exercice 4

1. On considère une fonction u définie et dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et on définit la fonction f par $f(x) = (u(x))^2$.

a. En utilisant la formule de dérivation d'un produit, déterminer une expression de $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ et de $u'(x)$.

b. Appliquer cette formule à la fonction $x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$.

2.a. Soit une fonction u définie et dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et on définit la fonction f_n pour tout entier naturel n non nul par $f(x) = (u(x))^n$.
Proposer une formule pour $f_n'(x)$ en fonction de $u(x)$ et de $u'(x)$.
Démontrer cette formule par récurrence.

b. Déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto \left(x^2 - 3x + 1\right)^3$, sans développer.

□

Exercice 5

1. Soit une fonction u définie et dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, qui ne s'annule pas sur I.

On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

En remarquant que pour tout réel $x \in I$, $u(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = 1$, déterminer $\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x)$ en fonction de $u(x)$ et de $u'(x)$.

2. Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 1}$ et préciser l'ensemble de définition de la fonction et de la dérivée.

3.a. Généraliser la formule précédente aux fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{(u(x))^n}$, $n \geq 1$.

b. Calculer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$.

□

Exercice 6

1. À l'aide des 3 exemples préceedents, proposer une formule générale pour la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto f(u(x))$.

2. Appliquer cette formule pour les fonctions de la forme $x \mapsto f(ax + b)$ puis calculer la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{-3x + 1}$ et préciser l'ensemble de définition de la fonction et de sa dérivée.

3. Calculer la fonction dérivée de $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ et préciser l'ensemble de définition de la fonction et de sa dérivée.

□

Exercice 7

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera les ensembles de définition des fonctions et de leurs dérivées):

a. $f_1(x) = (3x + 5)^4$ **b.** $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{x^2+1}$ **c.** $f_3(x) = \left(-4x^2 + 3\right)^3$

d. $f_4(x) = \dfrac{1}{(2x-6)^4}$ **e.** $f_5(x) = x\sqrt{4-x^2}$ **f.** $f_6(x) = -4\sqrt{x^2-1}$

On pourra déterminer les variations des fonctions proposées et comparer avec la courbe obtenue à la calculatrice.

□