Épisode 2: Dérivation (compléments)

La notion de composée de fonctions

1. Une situation

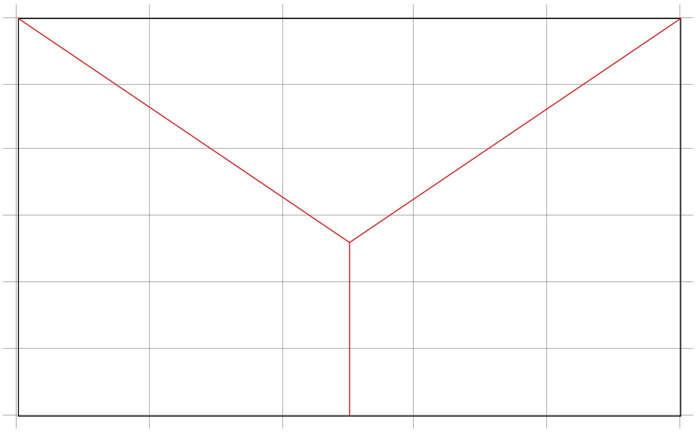
1.1. La situation

On considère un mur de 10 m de large sur 6 m de haut.
2 gouttières de récupérations des eaux identiques partent des coins en haut du mur et se rejoignent au milieu du mur pour se déverser dans une 3ème gouttière verticale qui rejoint le bas du mur.

On veut déterminer la hauteur de cette 3ème gouttière de telle sorte que la longueur totale de gouttières est minimale.

1.2. Éléments de solution

On réalise la figure suivante:



On note x la longueur de la gouttière verticale.
Déterminer la longueur totale de gouttières.

……

……

……

……

La question revient donc à déterminer le minimum de la fonction f sur $[0; 6]$. Il faudrait donc pouvoir calculer la fonction dérivée de la fonction f.
Quelles formules pour $f(x) =$ ……………………?

……

……

……

……

……

1.3. Conclusion

……

2. Compléments au calcul de dérivées

2.1. les fonctions de la forme u^n

Définition:
Pour tout entier naturel n, on note u^n la fonction définie par récurrence sur n par $u^0 = 1$ et pour $n \geq 0$, $u^{n+1}(x) = u'(x) \times u^n(x)$

Théorème (Dérivation)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors pour tout entier n, $n \geq 1$, la fonction u^n est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $(u^n)'(x) = n\,u'(x)\,u^{n-1}(x)$.

Preuve: ....

....

....

....

....

....

Exemples:

....

....

....

....

....

2.2. La fonction $\sqrt{u}$

Théorème:
Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive (i.e. $u(x) > 0$ pour tout réel $x \in I$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $\sqrt{u} : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Preuve: ....

....

....

....

Exemple:

....

....

....

2.3. Les fonctions de la forme $x \longmapsto f(m\,x + p)$, $m, p \in \mathbb{R}$.

Théorème:
Soit m et p deux réels.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Alors la fonction $g : x \longmapsto f(m\,x + p)$ est définie et dérivable pour tout réel x tel que $m\,x + p \in I$ et on a alors $g'(x) = m \times f'(m\,x + p)$.

On admet ici ce résultat qui se démontre en revenant à la définition et grâce aux calculs de limites.

Exemples:

....

....

....

....

2.4. (hors programme) le modèle général: la composition

Définition:
Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ de telle sorte que l'ensemble des images par f des éléments de I est inclus dans J.
Autrement dit, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in J$. On note aussi $f(I) \subset J$.
Alors la composée de f suivie de g, notée $g \circ f$, est la fonction définie sur I par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Autrement dit, l'image d'un réel x de I par la fonction composée de f suivie de g, est l'image par g de l'image par f du nombre x.

Les exemples précédents sont des cas particuliers de ce cas général:

- u^n est la composée d'une u suivie de $x \longmapsto x^n$;
- $\sqrt{u}$ est la composée d'une fonction u suivie de $\sqrt{}$;
- les fonctions de la forme $f : x \longmapsto f(m\,x + p)$ sont les composées d'une fonction affine $x \longmapsto m\,x + p$ suivie d'une fonction f;
- Remarquons le cas de la fonction $\frac{1}{u}$, composée d'une fonction u suivie de la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$. La dérivée est donnée par $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ et de manière plus générale $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n\,u'}{u^{n+1}}$.

Remarquons que l'intervalle J sur lequel est défini la fonction g "a disparu" à la lecture de la fonction composée. Attention néanmoins dans la mesure où il est fondamental, surtout s'il y a des valeurs interdites possibles.

On peut considérer les cas de fonctions comme $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$, $x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$, ...

3. Rappels

3.1. Les fonctions usuelles

On a le tableau des dérivées des fonctions de références ou fonctions usuelles :

Fonctions	Fonctions dérivées
$x \mapsto a$; $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto ax+b$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$; $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto \sqrt{x}$; $x \in \mathbb{R}^+$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x \in \mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$

3.2. Les formules algébriques

La somme de deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ est dérivable sur I et est égale à la somme des dérivées.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un $I \subset \mathbb{R}$, alors $(u+v)$ est dérivable et $(u+v)' = u' + v'$.

Le produit de deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ est dérivable sur I.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un $I \subset \mathbb{R}$, alors $u\,v$ est dérivable sur I et $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.

Pour tout **réel** k et toute fonction u dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, la fonction $k\,u$ est dérivable sur I et on a $(k\,u)' = k\,u'$.
En particulier pour $k = -1$, $(-u)' = -u'$.

La fonction inverse d'une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ qui ne **s'annule** pas sur I, est dérivable sur I.

Soit u une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

Le quotient de deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ est dérivable sur I partout où ce quotient est défini.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un $I \subset \mathbb{R}$ telles que de plus $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2} .$$

Exemples:

……

……

……

……

3.3. À quoi ça sert?

Théorème fondamental de la dérivation

Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$.
• la fonction f est croissante (resp strictement croissante) sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ (resp $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, et que tout sous-intervalle non trivial (non réduit à un point) contienne au moins un point de dérivée non nulle) .
• la fonction f est décroissante (resp strictement décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ (resp $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, et que tout sous-intervalle non trivial contienne au moins un point de dérivée non nulle).
• La fonction f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

• La fonction f admet un maximum relatif (resp un minimum relatif) en $x_0 \in I$ si et seulement si

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{pour } x < x_0 \text{ , } x \text{ voisin de } x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \\ f'(x) < 0 & \text{pour } x > x_0 \text{ , } x \text{ voisin de } x_0 \end{cases} \quad (\text{ resp } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{pour } x < x_0 \text{ , } x \text{ voisin de } x_0 \\ f'(x_0) = 0 & \\ f'(x) > 0 & \text{pour } x > x_0 \text{ , } x \text{ voisin de } x_0 \end{cases}) .$$

On dit que f admet un extremum relatif en $x_0 \in I$ si et seulement si f' s'annule en x_0 en changeant de signe sur un voisinage de x_0.

Application: Les variations permettent en particulier d'étudier les solutions à des équations ou inéquations du type $f(x) = k,\ f(x) \leq k,\ \ldots.$

3.4. Les tangentes

Les tangentes sont le pendant géométrique de la dérivation. Ce point de vue est fondamental et a toujours garder en tête. En particulier comme outil de démonstration.

Définition-Théorème:
Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$, f dérivable en a .
La fonction affine g telle $f(x) = g(x) + (x - a)\, \phi(x)$ avec
$\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = 0$ est appelé **approximation affine** de la fonction f au point a .
Cette fonction est unique.

On a pour tout réel x, $g(x) = f'(a)\,(x - a) + f(a)$

C'est la meilleure approximation affine de la fonction f sur un voisinage de a, c'est à dire que c'est la fonction affine, la plus proche de f pour tout réel x suffisamment proche de a.

Définition :
Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$,
f dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.
La droite d'équation $y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$ est appelée **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .

Remarquons que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(a; f(a))$ et a pour coefficient directeur le nombre dérivée de la fonction f en a .

Cette droite est la droite qui sur un voisinage de a, suffisamment petit, est la plus proche en terme de moyennes des distances à la courbe.

3. Problèmes

3.1.

3.2.

3.3.

3.4.

…………