Loi normale

Exercices

Loi binomiale et loi normale.

Loi normale centrée réduite

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Éléments de solutions

Loi binomiale et loi normale.

Exercice 1

Un commercial effectue régulièrement un trajet allant d'une ville A a une ville B. Pour rompre la monotonie, il utilise aléatoirement des parcours différents. On admet qu'il utilise le trajet passant par la ville C dans 8% des cas et le trajet de plus courte durée dans 40% des cas.
En 2013, ce commercial devra effectuer 50 fois le trajet.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, ou en 2011, ce commercial utilisera le trajet passant par la ville C.

a. Justifiez que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et précisez ses paramètres.

b. Calculez $p(X = 5)$.

2. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, ou en 2013, ce commercial utilisera le trajet de plus courte durée. On décide d'approcher la loi de Z par celle d'une variable Y, qui suit une loi normale.

a. Justifiez que les paramètres de cette loi normale sont $\mu = 20$ et $\sigma = 2\sqrt{3}$.

b. Calculez $p(16,5 \leqslant Y \leqslant 23,5)$.
Interprétez ce résultat relativement au nombre de trajets du commercial.

Correction:

1.a. L'expérience aléatoire consistant en un trajet entre la ville A et B et à passer par C ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès $p(C) = 0,08$.

Alors l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer 50 trajets et à passer par C ou non est la répétition de 50 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes puisque le commercial choisit le trajet par la ville C aléatoirement avec la probabilité $p = 0,08$.

Par conséquent on sait que la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois, ou en 2011, ce commercial utilisera le trajet passant par la ville C suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0, 08.

1.b. On a donc $p(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0,08^5 \times (1 - 0.08)^{50-5} = 0,1629$.

2.a. L'expérience aléatoire qui consiste à choisir le trajet de plus courte durée ou non est une expérience aléatoire à 2 issues c'est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès $p(\text{"plus courte durée"}) = 0,4$.

Par suite la variable aléatoire Z qui compte le nombre de fois, ou en 2013, ce commercial utilisera le trajet de plus courte durée est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli d'ordre 50 et de paramètre de succès 0, 4.
Par suite Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50; 0,4)$.

On sait alors que $E(Z) = 50 \times 0,4 = 20$ et $\sigma(Z) = \sqrt{50 \times 0,4 \times (1 - 0,4)} = \sqrt{50 \times \frac{40}{100} \times \frac{60}{100}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Par conséquent comme $50 \geq 30$ et comme $\begin{cases} 50 \times 0,4 = 20 \geq 5 \\ 50 \times 0,6 = 30 \geq 5 \end{cases}$, on sait que l'on peut approcher la variable aléatoire Z par une variable aléatoire Y suivant la loi normale de paramètres $\mu = E(Z) = 20$ et $\sigma^2 = (\sigma(Z))^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$.

b. On a donc $p(16,5 \leqslant Y \leqslant 23,5) = 0,69$.

Loi normale centrée réduite

Exercice 2

Une coopérative produit du beurre en micro-plaquettes de 12,5 g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les micro-plaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40.
On admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 micro-plaquettes suit une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$.

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$).

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.

2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $p(\mu - h < X < \mu + h) = 0,95$.
Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformités.

a. Soit $Z = \dfrac{X - 500}{\sqrt{1,6}}$. quelle loi suit Z ?

b. Montrer que $(\mu - h \leq X \leq \mu + h)$ équivaut à $\dfrac{\mu - h - 500}{\sqrt{1,6}} \leq Z \leq \dfrac{\mu + h - 500}{\sqrt{1,6}}$.

c. Donner une valeur de a telle que $p(-a \leq Z \leq a) \approx 0,95$.

d. Déterminer une valeur approchée des poids d'alerte.

Correction:

1. On sait que comme la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 micro-plaquettes suit une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$ alors $p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0,997$.
Comme la boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$) alors la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme est donc $1 - 0.997 = 0,003$.

2.a. On a $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ donc par définition Z est la variable aléatoire centrée réduite associée à X.
Comme X suit une loi normale, alors Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;\ 1)$.

b. On a:

$$(\mu - h \leq X \leq \mu + h) \Longleftrightarrow \mu - h - 500 \leq X - 500 \leq \mu + h - 500$$

$$(\mu - h \leq X \leq \mu + h) \Longleftrightarrow \frac{\mu - h - 500}{\sqrt{1,6}} \leq \frac{X - 500}{\sqrt{1,6}} \leq \frac{\mu + h - 500}{\sqrt{1,6}}$$

$$(\mu - h \leq X \leq \mu + h) \Longleftrightarrow \frac{\mu - h - 500}{\sqrt{1,6}} \leq Z \leq \frac{\mu + h - 500}{\sqrt{1,6}}$$

c. Comme $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$ alors le réel a tel que $p(-a \leq Z \leq a) \approx 0,95$ est tel que $p(Z \leq a) \approx 0,95 + \dfrac{0,05}{2} \approx 0,975$.

On obtient $a = 1,96$.
Donc $p(-1,96 \leq Z \leq 1,96) \approx 0,95$.

Les poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ sont donc tels que $\begin{cases} \dfrac{\mu - h - 500}{\sqrt{1,6}} = -1,96 \\ \dfrac{\mu + h - 500}{\sqrt{1,6}} = 1,96 \end{cases}$

On obtient donc $\begin{cases} \mu - h = 500 - 1,96\sqrt{1,6} \approx 497,5\ g \\ \mu + h = 500 + 1,96\sqrt{1,6} \approx 502,5\ g \end{cases}$.

Exercice 3

Sur une chaîne embouteillage dans une brasserie, la quantité X (en cL) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance 110 cL peut être modélisée par une variable aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.
La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles contenant moins d'un litre.

1. À quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation ?

2. La contenance des bouteilles étant de 110 cL, quelle est alors la probabilité qu'une bouteille déborde lors du remplissage ?

3. Le directeur de la coopérative veut qu'il y ait moins de 1% de bouteilles qui débordent au risque de ne plus suivre la législation.
a. Quelle est alors la valeur de μ ?

b. Quelle est dans les conditions de la question **a.** la probabilité que la bouteille contienne moins d'un litre ?

c. Déterminer μ et σ afin qu'il y ait moins de 0,1% de bouteilles de moins de 1 litre et moins de 1% de bouteilles qui débordent. On pourra poser $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ et traduire ces conditions pour Y.

Correction:

1. La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\ 2^2)$.
Donc la variable aléatoire centrée réduite $Z = \dfrac{X - \mu}{2}$ suit la loi $\mathcal{N}(0;\ 1)$.

On a $(X < 100) \Longleftrightarrow (X - \mu < 100 - \mu) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{X - \mu}{2} < \dfrac{100 - \mu}{2}\right) \Longleftrightarrow \left(Z < \dfrac{100 - \mu}{2}\right)$.

Alors comme on cherche μ tel que $p(X < 100) \leq 0,001$ cela revient à déterminer μ tel que $p\left(Z < \dfrac{100 - \mu}{2}\right) \leq 0,001$.

Or le réel α tel que $p(Z < \alpha) \leq 0,1$ est $\alpha \approx -3,0902$, alors μ vérifie $\dfrac{100 - \mu}{2} = -3,0902$.

On obtient $\mu = 100 + 2 \times 3,0902 = 106,18$ cL $\approx 106,2$ cL.

Donc $X \sim \mathcal{N}(106,2\,;\ 2^2)$.

2. L'événement «la bouteille déborde» est l'événement $(X \geq 110)$ donc comme $X \sim \mathcal{N}(106,2\,;\ 2^2)$, on obtient $p(X \geq 110) = 1 - p(X < 110) \approx 1 - 0,9712 \approx 0,0288 \approx 2,8\,\%$.

3.a. Cette fois on cherche μ tel que $p(X \geq 110) \leq 0,01$ donc on cherche μ tel que $p\left(Z \geq \dfrac{110-\mu}{2}\right) \leq 0,01$.

Par suite, il faut μ tel que $p\left(Z < \dfrac{110-\mu}{2}\right) > 0,99$.

Le réel β tel que $p(Z \leq \beta) \approx 0,99$ sachant que $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$ est $\beta \approx 2,3263$ donc μ vérifie $\dfrac{110-\mu}{2} = 2,3263$.

On obtient alors $\mu = 110 - 2 \times 2,3263 \approx 105,3474$.
Alors $X \sim \mathcal{N}(105,4\,;\ 2^2)$.

b. Comme $X \sim \mathcal{N}(105,4\,;\ 2^2)$, alors $p(X < 100) \approx 0,0035 \approx 0,35\,\%$.

c. On cherche μ et σ tel que $p(X < 100) < 0,001$ et $p(X \geq 110) < 0,01$.

Il faut donc μ et σ tels que $p\left(Z < \dfrac{100-\mu}{\sigma}\right) < 0,001$ et $p\left(Z \geq \dfrac{110-\mu}{\sigma}\right) < 0,01$.

Par conséquent les réels μ et σ vérifient le système (S) $\begin{cases} \dfrac{100-\mu}{\sigma} = \alpha \approx -3,0902 \\ \dfrac{110-\mu}{\sigma} = \beta \approx 2,3263 \end{cases}$.

On obtient:

- $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 100-\mu = -3,0902\,\sigma & (L1) \\ 110-\mu = 2,3263\,\sigma & (L2) \end{cases}$
- $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} 572,552 - 5,4165\,\mu = 0 & (L1) \longleftarrow 2,3263\,(L1) + 3,0902\,(L2) \\ 110-\mu = 2,3263\,\sigma & (L2) \end{cases}$
- $(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{572,552}{5,4165} \approx 105,7052 \\ \sigma = \dfrac{110-\mu}{2,3263} \approx 1,8462 \end{cases}$

Donc pour respecter les deux contraintes, il faut que la machine d'embouteillage suive la loi normale $\mathcal{N}(105,7\,;\ 1,85^2)$.

On peut remarquer que $\mu = \dfrac{100 \times \beta + 110 \times (-\alpha)}{(-\alpha) + \beta}$.

Exercice 4

La durée de vie d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Déterminer μ et σ^2.

2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Correction:

1. On cherche μ et σ telle que la variable aléatoire T égale à la durée de vie d'un appareil vérifie les conditions:

- $p(120 \leq T \leq 200) = 0,8$
- $p(T < 120) = 0,05$

On pose $Z = \dfrac{T - E(T)}{\sigma(T)} = \dfrac{T-\mu}{\sigma}$, la variable centrée réduite associée à T, avec $T \sim \mathcal{N}(\mu;\ \sigma^2)$. On sait que Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;\ 1)$.

Alors il faut déterminer μ et σ tel que $\begin{cases} p\left(\dfrac{120-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \dfrac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0,8 \\ p\left(Z < \dfrac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases}$.

On en déduit que μ et σ vérifient le système $\begin{cases} p\left(Z \leq \dfrac{200-\mu}{\sigma}\right) = 0,85 \\ p\left(Z < \dfrac{120-\mu}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases}$

Or comme $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$, on obtient:

- le réel α tel que $p(Z \leq \alpha) = 0,85$ est $\alpha = 1,0364$
- le réel β tel que $p(Z < \beta) = 0,05$ est $\beta = -1,6449$

Par suite μ et σ vérifient le système $\begin{cases} \dfrac{200-\mu}{\sigma} = 1,0364 \\ \dfrac{120-\mu}{\sigma} = -1,6449 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 200-\mu = 1,0364\,\sigma \\ 120-\mu = -1,6449\,\sigma \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} 453,348 - 2,6813\,\mu = 0 \\ \sigma = \dfrac{120-\mu}{-1,6449} \end{cases}$ et donc $\begin{cases} \mu = 169,0777 \\ \sigma = 29,8363 \end{cases}$.

On en déduit que T suit la loi normale $\mathcal{N}(169\,;\ 29,8^2)$ (ou $\mathcal{N}(169\,;\ 30^2)$).

2. Alors la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours est $p(200 \leq T \leq 230) = 0,129 \approx 12,9\,\%$.

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Exercice 5

Une assurance s'intéresse aux coûts des sinistres susceptibles de survenir en 2013. On note X la variable aléatoire qui à chaque sinistre associe son coût. L'étude des années précédentes montre que X suit la loi normale de moyenne 1130 et d'écart type 180.

Quelle est la probabilité qu'en 2013 un sinistre pris au hasard coûte entre 850 et 1700 euros ?

Correction:

Comme $X \sim \mathcal{N}(1130\,;\ 180^2)$, alors la probabilité qu'en 2013 un sinistre pris au hasard coûte entre 850 et 1700 euros est $p(850 \leq X \leq 1700) = 0,9393$.

Exercice 6

Un usine fabrique des puzzles de 512 pièces. Pour tester la conformité des puzzles, le service qualité de l'entreprise prélève au hasard un puzzle de 512 pièces. On appelle X la variable aléatoire qui à un puzzle donné associe le nombre de pièces non conforme. On estime que X suit le loi normale de moyenne 9 et d'écart type 3.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 12 pièces non conformes dans le puzzle.

2. Déterminer le réel x_0 tel que $p(X > x_0) = 0,01$.
En déduire le plus petit entier k tel que la probabilité que le puzzle comporte plus de k pièces non conformes soit inférieure à 0,01.

Correction:

1. Comme X est la variable aléatoire qui à un puzzle donné associe le nombre de pièces non conforme et comme $X \sim \mathcal{N}(9;\ 3^2)$ alors la probabilité qu'il y ait au plus 12 pièces non conformes dans le puzzle est $p(X \leq 12) = 0,8413$.

2. On cherche x_0 tel que $p(X > x_0) = 0,01$ donc tel que $p(X \leq x_0) = 0,99$.
Le réel x_0 vérifie donc:

$p(X - 9 \leq x_0 - 9) = 0,99$

$p\left(\dfrac{X-9}{3} \leq \dfrac{x_0-9}{3}\right) = 0,99$

$p\left(Z \leq \dfrac{x_0-9}{3}\right) = 0,99$, où Z est la variable aléatoire centrée réduite associée à X, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

On sait que $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$ et donc le réel α tel que $p(Z \leq \alpha) = 0,99$ est $\alpha \approx 2,3263$.

Par conséquent x_0 vérifie $\dfrac{x_0-9}{3} \approx 2,3263$ donc $x_0 \approx 9 + 3 \times 2,3263 \approx 15,9789$.

On a donc obtenu que $p(X > 15,9789) = 0,01$.

Par suite $p(X > 16) < 0,01$ et $p(X > 15) > 0,01$.

Donc le plus petit entier k tel que la probabilité que le puzzle comporte plus de k pièces non conformes soit inférieure à 0,01 est $k = 16$.

Exercice 7

La température T pendant le mois de juillet suit une loi normale de moyenne 22°C et d'écart type 4°C.
Calculer la probabilité que la température :

1. soit inférieure à 19°C

2. soit supérieure à 25°C

3. soit comprise entre 18 et 26°C

Correction:

1. On a $T \sim \mathcal{N}(22\,;\ 4^2)$ donc $p(T \leq 19) = 0,23$.

2. $p(T > 25) = 1 - p(T \leq 25) = 1 - 0,7734 = 0,23$.

3. $p(18 \leq T \leq 26) = p(22 - 4 \leq T \leq 22 + 4) = p(\mu - \sigma \leq T \leq \mu + \sigma) = 0,68$.

Exercice 8

On suppose que les masses des blocs de foie gras produites par la société Toutdeloi sont distribuées normalement avec une moyenne de 250g et d'un écart type de 10g.
On considère qu'un bloc n'est pas rentable si sa masse est plus grande ou égale à 265g.

Calculer le pourcentage de blocs non rentables fabriqués par cette société.

Correction:

La variable aléatoire P qui à un bloc choisi aléatoirement associe le poids de ce bloc en gramme suit la loi normale $\mathcal{N}(250\ ;\ 10^2)$.
Comme un bloc est non rentable lorsque $(P > 265)$ alors la probabilité qu'un bloc ne soit pas rentable est donnée par $p(P > 265) = 1 - p(P \leq 265) = 0,07$.
On en conclut qu'il y a 7% de blocs non rentables dans la production de la société Toudeloi.

Exercice 9

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race Française Frisonne Pis Noir peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.
La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.
1. Afin de gérer au mieux son quota laitier, en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.

a. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres de lait par an.

b. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.

c. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres de lait par an.

2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître :

a. La production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.

b. La production minimale prévisible des 20% de vaches les plus productives du troupeau.

Correction:

1.a. On note Q la variable aléatoire qui à une vache associe sa production annuelle de lait.
La variable aléatoire Q suit la loi $\mathcal{N}(6000;\ 400^2)$.
Alors la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres de lait par an est donnée par
$p(Q \leq 5800) = p(Q \leq 6000) - p(5800 \leq Q \leq 6000) = \frac{1}{2} - 0,1914 = 0,3085$.

1.b. La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an est $p(5900 \leq Q \leq 6100) = 0,1974$.

1.c. La probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres de lait par an est
$p(Q \geq 6250) = 1 - p(Q < 6250) = 1 - (p(Q \leq 6000) + p(6000 \leq X \leq 6250)) = \frac{1}{2} - 0,234 = 0,266$.

2.a. On cherche la production q telle que $p(Q \leq q) \leq 0,3$.
Alors on pose $Z = \frac{Q - 6000}{400}$ la variable centrée réduite associée à la variable aléatoire Q.
On sait alors que Z suit la loi $\mathcal{N}(0;\ 1)$.
Comme $(Q \leq q) \Longleftrightarrow \left(Z \leq \frac{q - 6000}{400}\right)$ alors il faut déterminer le réel α tel que $p(Z \leq \alpha) = 0,3$ sachant que $Z \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$.
On obtient: $\alpha = -0,5244$.
Alors on a $\frac{q - 6000}{400} = -0,5244$ d'où $q = 6000 - 0,5244 \times 400 = 5790,4$.
On en déduit que la production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau est 5790, 4 L.
2.b. Cette fois, on cherche le réel q tel que $p(Q \geq q) = 0,2$.
On obtient $p\left(Z \geq \frac{q - 6000}{400}\right) \geq 0,2$ et donc $p\left(Z < \frac{q - 6000}{400}\right) = 0,8$.
Le réel β tel que $p(Z < \beta) = 0,8$ est $0,8416$.
Donc on a $q = 6000 + 0,8416 \times 400 = 6336,64$.
On en déduit $p(Q \geq 6336,64) \approx 0,2\,(002)$.
La production minimale prévisible des 20% de vaches les plus productives du troupeau est donc 6336, 64 L de lait par an.

Exercice 10

Méthode :
Lorsque μ ou σ n'est pas connu, ou les deux, il faut se ramener impérativement à la loi centrée réduite pour les déterminer. En effet, la loi centrée réduite admet toujours $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
Une machine vend du jus d'orange frais dans des gobelets de 500 mL. Le volume versé suit une loi normale d'espérance 475 mL et d'écart-type 20 mL.

1. Donner la probabilité que le volume distribué soit:

a. inférieur à 480 mL;

b. compris entre 460 et 490 mL.

2. Quelle est la probabilité que la boisson déborde du gobelet?

3. Pour éviter le problème du débordement, l'ingénieur-concepteur de la machine peut ajuster la valeur moyenne qui est versée.
À quelle valeur faut-il l'ajuster pour que la probabilité de débordement soit 0,001 ?

Correction:

1.a. La variable aléatoire V égale au volume de jus versé dans un gobelet suit la loi normale $\mathcal{N}(475;\ 20^2)$.

Alors la probabilité que le volume distribué soit inférieur à 480 mL est donnée par $p(V \leq 480) = p(V \leq 475) + p(475 \leq V \leq 480)$ donc $p(V \leq 480) \approx \frac{1}{2} + 0,0987 = 0,5987$.

b. la probabilité que le volume distribué soit compris entre 460 et 490 mL est $p(460 \leq V \leq 490) = 0,5467$.

2. Un gobelet peut contenir 500 mL. L'événement "le gobelet déborde" est donc l'événement $(V > 500)$.
On a $p(V > 500) = 1 - p(V \leq 500) = 1 - (p(V \leq 475) + p(475 \leq V \leq 500))$

Donc $p(V > 500) = 1 - \left(\frac{1}{2} + 0,394\right) = 0,1056$.

3. Il s'agit donc de déterminer μ telle que si $V \sim \mathcal{N}(\mu; 20^2)$ alors $p(V > 500) \leq 0,001$ et donc $p(V \leq 500) \geq 0,999$.

On note $Z = \frac{V - \mu}{20}$ la variable centrée réduite associée à V.
Alors on sait que $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.
Or $(V \leq 500) \Longleftrightarrow \left(\frac{V-\mu}{20} \leq \frac{500-\mu}{20}\right) \Longleftrightarrow \left(Z \leq \frac{500-\mu}{20}\right)$.
Donc on cherche μ tel que $p\left(Z \leq \frac{500-\mu}{20}\right) \geq 0,999$ sachant que $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$.

Alors comme pour une variable aléatoire Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$, le nombre α tel que $p(Z \leq \alpha) = 0,999$ est $\alpha \approx 3,0902$.

N.B: on utilise la fonction de la calculatrice pour déterminer α.

Finalement, on cherche μ tel que $\frac{500-\mu}{20} = 3,0902$.
Par suite $\mu = 500 - 20 \times 3,0902 = 438,1954$.
On peut donc choisir $\mu = 438$ mL et alors on peut assurer que $p(V > 500) < 0,001$.