Exercices: Loi normale et fluctuations

Éléments de solutions

Exercice 1

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle de qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement « La tablette est mise sur le marché ».

L'événement $(98 \leq X \leq 102)$ correspond à l'événement $(100 - 2\times 1 \leq X \leq 100 + 2\times 1) = (\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\,\sigma)$.
Par suite comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(100;\, 1^2)$ alors on sait que $p(98 \leq X \leq 102) = 0,954$.

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne $0,97$.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « La tablette est mise sur le marché » soit égale à $0,97$.

Remarquons que l'événement $(98 \leq X \leq 102)$ est identique à l'événement $\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq \dfrac{X-100}{\sigma} \leq \dfrac{2}{\sigma}\right)$.

Par suite $p(98 \leq X \leq 102) = p\left(\dfrac{-2}{\sigma} \leq \dfrac{X-100}{\sigma} \leq \dfrac{2}{\sigma}\right)$.

Or comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(100;\, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire centrée réduite associée à X, $Z = \dfrac{X-100}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;\, 1)$.

Ainsi on détermine le réel $u = \dfrac{2}{\sigma}$ tel que $p\left(-u \leq \dfrac{X-100}{\sigma} \leq u\right) = 0,97$.

Remarquons que déterminer u tel que $p\left(-u \leq \dfrac{X-100}{\sigma} \leq u\right) = 0,97$ revient à déterminer u tel que $p(Z \leq u) = p\left(\dfrac{X-100}{\sigma} \leq u\right) = 0,985$.

En effet, $\overline{(-u \leq Z \leq u)} = (Z < -u) \bigcup (Z > u)$ d'où $p(Z < -u) + p(Z > u) = 1 - p(-u \leq Z \leq u) = 0,03$ et par symétrie de la loi normale $p(Z < -u) = p(Z > u)$ d'où $p(Z = -u) = p(Z = u) = 0,015$.
Finalement $p(Z \leq u) = p(Z < -u) + p(-u \leq Z \leq u) = 0,985$.

On obtient alors $u \approx 2,17\,009$.

Ainsi il faut $\sigma = \dfrac{2}{2,17\,009} \approx 0,922$.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme. L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes. On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « La fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « La fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

On cherche à déterminer $p_C(F_1) = \dfrac{p(F_1 \cap C)}{p(C)}$.

On sait que $p(F_1 \cap C) = p(F_1)\, p_{F_1}(C) = 0,5 \times 0,98 = 0,49$ puisque l'on déduit que le premier fournisseur fournit 50% de la production donc $p(F_1) = 1 - (0.3 + 0,2) = 0,5$ et que parmi cette production, 98% des fèves respectent le taux d'humidité donc $p_{F_1}(C) = 0,98$.

F_1, F_2 et F_3 définissent une partition de l'univers. Alors d'après la formule des probabilités totales:

$$p(C) = p(F_1 \cap C) + p(F_2 \cap C) + p(F_3 \cap C)$$
$$p(C) = 0,49 + p(F_2)\, p_{F_2}(C) + p(F_3)\, p_{F_3}(C)$$
$$p(C) = 0,49 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times (1 - 0,2)$$
$$p(C) = 0,92.$$

Finalement $p_C(F_1) = \dfrac{0,49}{0,92} = 0,53$.

2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes. Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Dans ces conditions, $p(C) = p(F_1 \cap C) + p(F_2 \cap C) = 0,98\, p + 0,9\,(1 - p) = 0,08\, p + 0,9$.
En effet F_1 et F_2 forment alors une partition de l'univers donc $p(F_2) = 1 - p(F_1) = 1 - p$.

Par suite comme on veut $p(C) = 0,92$, p est solution de $0,08\, p + 0,9 = 0,92$ d'où $p = \dfrac{1}{4}$.

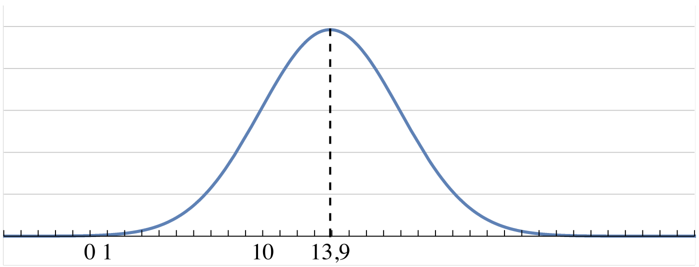
Un quart de la production devra venir du fournisseur 1 au moins pour respecter la proportion de 92% de fèves conformes.

Exercice 2

Les deux parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante*

Partie A

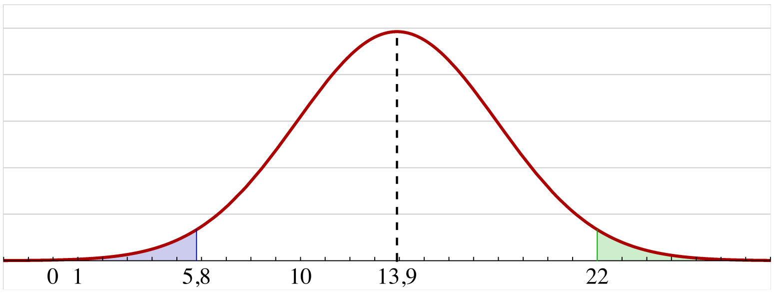
Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.
La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1. On sait que $p\,(T \geq 22) = 0,023$. En exploitant cette information :

a. Hachurer sur le graphique donné en annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à 0,023 ;

Comme une loi normale est symétrique par rapport à son espérance, et comme $22 = 13,9 + 8,1$, alors on en déduit que $p(X \leq 5,8) = p(X \leq 13,9 - 8,1) = p(X \geq 13,9 + 8,1) = p(X \geq 22) = 0,023$.
On hachure les domaines du plan compris entre la courbe représentative de loi de densité, l'axes des abscisses et “à gauche” de la droite d'équation $x = 5,8$ pour un domaine et “à droite” de la droite d'équation $x = 22$ pour le second.
On obtient:



b. Déterminer $p(5,8 \leq T \leq 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est 4, 1.

Ainsi comme $\overline{(5,8 \leq X \leq 22)} = (X \leq 5,8) \bigcup (X \geq 22)$, on en déduit que $p(5,8 \leq X \leq 22) = 1 - 2\times 0,023 = 0,954$.

Or pour une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors on sait que:

- $p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$;
- pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel u_α tel que $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Par suite on déduit de $p(5,8 \leq X \leq 22) = p(13,9 - 8,1 \leq X \leq 13,9 + 8,1) = 0,954$ que $u_{0,046} = 22 = 13,9 + 2\sigma$ d'où $\sigma = 4,05$.
X suit la loi normale $\mathcal{N}(13,9\,;\,4,05^2)$.

2. On choisit un jeune en France au hasard. Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine. Arrondir au centième.

On cherche donc à calculer $p(X \geq 18)$.
On a $p(X \geq 18) = p(\overline{X \leq 18}) = 1 - p(X \leq 18) \approx 1 - 0,844 \approx 0,156 = 0,16$ au centième près.

Partie B

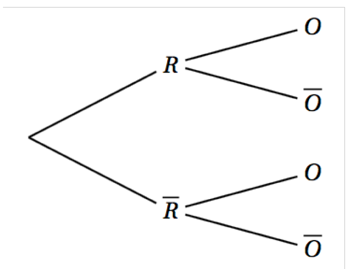
Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.
La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.
Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole (P) suivant :
On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans. Pour chaque jeune de cet échantillon :
• le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
• l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;

■ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
■ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
■ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères. On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

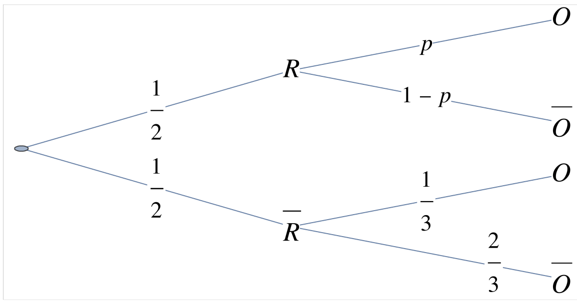
1. *Calculs de probabilités*

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (P). On note :
R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».
Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilté q de l'événement « le jeune a répondu Oui » est: $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

On obtient l'arbre de probabilités:



Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers.

Par suite $p(O) = p(R \cap O) + p\left(\overline{R} \cap O\right)$ d'après la formule des probabilités totales.

Par conséquent, $p(O) = p(R)\, p_R(O) + p(\overline{R})\, p_{\overline{R}}(O)$. Or:

- il y a autant de pairs que d'impairs sur le dé donc $p(R) = p(\overline{R}) = \frac{1}{2}$;
- dans le cas où le jeune répond sincèrement, il répond donc "oui" avec la probabilité p donc $p_R(O) = p$.
- dans le cas où il répond en fonction du numéro du dé, "oui" est donné pour un impair parmi 3 donc

$p_{\overline{R}}(O) = \frac{1}{3}$.

Finalement, $q = p(O) = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

a. À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (P). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

La taille de l'échantillon est $N = 1500 \geq 30$.

La fréquence observée est $\frac{625}{1500} = \frac{5}{12} \approx 0,41$.
Ainsi $N f_{\text{obs}} \geq 5$ et $N(1 - f_{\text{obs}}) \geq 5$.
L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95% est donné par

$$\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{N}}; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{N}}\right] = \left[\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{1500}}; \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] \approx [0,391\ ;\ 0,442].$$

On peut donc estimer $q \in [0,391\ ;\ 0,442]$.

b. Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

On a montré que $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}$ et que $q \in [0,391\ ;\ 0,442]$ donc $0,391 \leq \frac{1}{2}p + \frac{1}{6} \leq 0,442$ d'où
$2\left(0,391 - \frac{1}{6}\right) \leq p \leq 2\left(0,442 - \frac{1}{6}\right)$ et ainsi $0,449 \leq p \leq 0,550$.
On peut estimer que $p \in [0,45\ ;\ 0,55]$ au niveau de confiance de 95%.

Exercice 3

Commun à tous les candidats

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie « Choc'o » fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :
• la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.
• la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l' évènement : « la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
C l'évènement : « la tablette de chocolat est commercialisable ».
On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1. Montrer que $P(C) = 0,03\,x + 0,95$.

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales, on obtient donc:

$$p(C) = p(A \cap C) + p\left(\overline{A} \cap C\right)$$
$$p(C) = p(A)\, p_A(C) + p(\overline{A})\, p_{\overline{A}}(C)$$
$$p(C) = x \times 0,98 + (1-x) \times 0,95$$
$$p(C) = 0,03\,x + 0,95$$

2. À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

On a obtenu $p(C) = 0,96$. Ainsi $0,03\,x + 0,95 = 0,96$ d'où $x = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi $1 - x = \dfrac{2}{3}$ et donc $p(\overline{A}) = 2 \times p(A)$.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

Comme la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle de paramètre λ alors on sait que son espérance est donnée par $\dfrac{1}{\lambda}$.
Or on sait que la durée de vie moyenne de la machine est de 5 ans donc comme Z représente cette durée de vie, on a $E(Z) = 5$.
Finalement $\dfrac{1}{\lambda} = 5$ d'où $\lambda = \dfrac{1}{5}$.

2. Calculer $P(Z > 2)$.

On obtient $p(Z > 2) = 1 - p(Z \leq 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}\, dx = 1 - \left(\left[-e^{\frac{1}{5}x}\right]_0^2\right) = 1 - \left(-e^{\frac{2}{5}} - (-1)\right) = e^{-\frac{2}{5}}$.

3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

On détermine $p_{(Z>3)}(Z > 5) = \dfrac{p((Z > 5) \cap (Z > 3))}{p(Z > 3)} = \dfrac{p(Z > 5)}{p(Z > 3)}$ puisque $(Z > 5) \cap (Z > 3) = (Z > 5)$.

Ainsi $p_{(Z>3)}(Z>5)=\dfrac{1-p(Z\le 5)}{1-p(Z\le 3)}=\dfrac{1-\left(1-e^{-\frac{1}{5}\times 5}\right)}{1-\left(1-e^{-\frac{1}{5}\times 3}\right)}=\dfrac{e^{-1}}{e^{-\frac{3}{5}}}=e^{-\frac{2}{5}}=p(Z>2)$.

En effet $5=3+2$ donc on retrouve la loi de durée de vie sans vieillissement, caractéristique de la loi exponentielle.

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu=85$ et d'écart type $\sigma=2$.

1. Calculer $P(83<X<87)$. Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

On a $(83<X<87)=(85-2<X<85+2)=(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)$.
Alors comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(85;2^2)=\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, on sait que $p(83<X<87)\approx 0,683$.

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que : $p(85-a<X<85+a)=0,9$.

On a:

$$\begin{aligned}&85-a<X<85+a\\&-a<X-85<a\\&\frac{-a}{2}<\frac{X-85}{2}<\frac{a}{2}\end{aligned}$$

Or la variable aléatoire centrée réduite associée à X, $\dfrac{X-85}{2}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ puisque X suit la loi normale $\mathcal{N}(85;2)$.

On détermine donc l'unique entier $u=\dfrac{a}{2}$ tel que $p\left(-u<\dfrac{X-85}{2}<u\right)=0,9$ c'est à dire l'unique entier u_α tel que $p\left(\dfrac{X-85}{2}<u\right)=0,95$ puisque

$p\left(\dfrac{X-85}{2}\le -u\right)=p\left(\dfrac{X-85}{2}\ge u\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-p\left(-u<\dfrac{X-85}{2}<u\right)\right)=\dfrac{1}{2}(1-0,9)=0,05$.

On obtient $u=1,645$ donc il vient $a=3,29$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Ainsi $p(85-3,29<X<85+3,29)=0,9$: 90% des tablettes commercialisables ont une teneur en cacao comprise entre $81,71$ % et $88,29$ %.

3. La chocolaterie vend un lot de 10 000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle $[81,7\ ;\ 88,3]$.
Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.
Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

Les conditions du prélèvement correspondent à celle d'un schéma de Bernoulli d'ordre 550, dont la probabilité de succès est $0,9$, probabilité clamée par l'enseigne qu'une tablette aient un pourcentage de cacao compris entre 81,7 et 88,3.
La variable aléatoire X_{550} égale au nombre de tablettes respectant le pourcentage de cacao parmi les 550 suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(550\ ;\ 0,9)$.

Remarquons alors que $N=550\ge 30$, $N\,p=550\times 0,9=495\ge 5$ et $N(1-p)=55\ge 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la variable aléatoire $F_{550}=\dfrac{X}{550}$ est donnée par

$$I_f=\left[0,9-1,96\times\frac{\sqrt{0,9\,(1-0,9)}}{\sqrt{550}};0,9-1,96\times\frac{\sqrt{0,9\,(1-0,9)}}{\sqrt{550}}\right]=[0,875\ ;\ 0,925].$$

Comme $f_{\text{obs}}=\dfrac{550-80}{550}=0,85\notin I_f$ alors l'affirmation de la chocolaterie doit être rejetée.

Remarque: on peut travailler avec la v.a. X_{550} qui compte le nombre de défaut. Alors on vérifie que

$$\frac{80}{550} \notin I_f = \left[0,1 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1\,(1-0,1)}}{\sqrt{550}} ; 0,1 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,1\,(1-0,1)}}{\sqrt{550}}\right] = [0,075\,;\,0,125].$$

Exercice 4

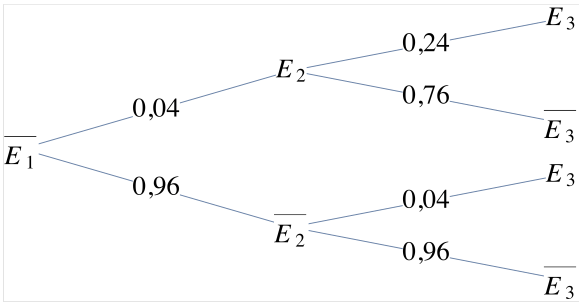
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n, le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ».
On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \le p_n \le 1$.

1.a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

On représente la situation par l'arbre de probabilité:



Par suite comme E_2 et $\overline{E_2}$ forment une partition de l'univers, d'après la propriété des probabilités totales, on obtient:

$p_3 = p(E_3) = p(E_3 \cap E_2) + p\left(E_3 \cap \overline{E_2}\right)$

$p_3 = p(E_2)\, p_{E_2}(E_3) + p(\overline{E_2})\, p_{\overline{E_2}}(E_3)$

$p_3 = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04$

$p_3 = 0,048.$

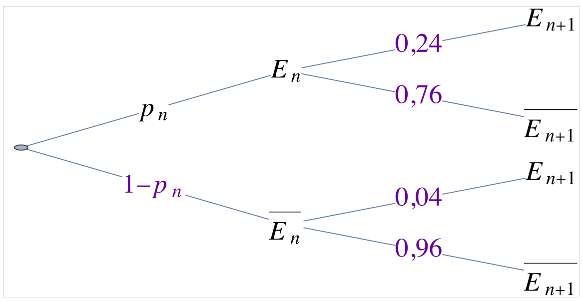
b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie, la deuxième semaine.

On détermine $p_{E_3}(E_2) = \dfrac{p(E_2 \cap E_3)}{p(E_3)}$.

Ainsi $p_{E_3}(E_2) = \dfrac{0,04 \times 0,24}{0,048} = 0,2.$

20% des salariés absents pour cause de maladie la troisième semaine étaient aussi des salariés absents pour cause de maladie la deuxième semaine.

2.a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous:



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2\,p_n + 0,04$.

Soit n un entier non nul.

$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$

$p_{n+1} = p(E_n)\, p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n})\, p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$

$p_{n+1} = p_n \times 0,24 + (1 - p_n) \times 0,04$

$p_{n+1} = 0,2\, p_n + 0,04.$

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera la raison r et le premier terme.

Soit n un entier naturel non nul. alors:

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05$

$u_{n+1} = (0,2\, p_n + 0,04) - 0,05$

$u_{n+1} = 0,2\, p_n - 0,01$

$u_{n+1} = 0,2\left(p_n - \dfrac{0,01}{0,2}\right)$ alt: $u_{n+1} = 0,2\,(u_n + 0,05) - 0,01$

$u_{n+1} = 0,2\,(p_n - 0,05)$ alt: $u_{n+1} = 0,2\, u_n + 0,01 - 0,01$

$u_{n+1} = 0,2\, u_n$

La suite (u_n)cest donc une suite géométrique de raison $0,2$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et de r.

On sait donc que $u_n = -0,05 \times 0,2^{n-1}$ et finalement $p_n = -0,05 \times 0,2^{n-1} + 0,05 = 0,05\left(1 - 0,2^{n-1}\right)$

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

Comme $0 < 0,2 < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} 0,2^{n-1} = 0$.

Par conséquent $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to \longrightarrow \infty} -0,05 \times 2^{n-1} + 0,05 = 0,05.$

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante.

On considère l'algorithme suivant:

Variables	K et J sont des entiers naturels
	P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0{,}05 - 10^{-K}$
	P prend la valeur $0{,}2 \times P + 0{,}04$
	J prend la valeur $J + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

L'affichage final J correspond au plus petit entier naturel n tel que $p_n \geq 0,05 - 10^{-K}$.

C'est donc le plus petit entier n pour lequel la probabilité que le salarié soit absent pour cause de maladie est égale à 0,05, à 10^{-K} près.

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

On sait que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} p_n = 0,05.$

Ainsi pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que $n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |p_n - 0,05| < \epsilon$.

Partant pour $\epsilon = 10^{-K}$, il eiste un entier J tel que $n \geq J \Longrightarrow |p_n - 0,05| < 10^{-K} \Longleftrightarrow 0,05 - 10^{-K} < p_n < 0,05 + 10^{-K}$.

Dans notre cas puisque (p_n) est croissante, on peut assurer que $p_n \leq 0,05$ et donc la condition $p_n > 0,05 - 10^{-K}$ suffit.

Finalement, on peut assurer l'existence de l'entier J. L'algorithme s'arrête.

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire X.

L'expérience aléatoire pour un salarié d'être malade ou pas une semaine donnée est une expérience aléatoire à deux issues dont la probabilité d'être malade est $p = 0,05$.
Comme cette probabilité est identique pour tous les salariés, et que l'état de santé d'un salarié est indépendant de l'état de santé des autres, alors, l'expérience aléatoire qui consiste à comptabiliser le nombre de slariés malade une semaine donnée est la répétition de 220 expériences aléatoires à 2 issues identiques et indépendantes.
C'est donc un schéma de Bernoulli d'ordre 220 dont le paramètre p, probabilité d'être malade est $p = 0,05$.

Par conséquent la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(220\ ;\ 0,05)$.

On a alors $E(X) = 220 \times 0,05 = 11$ et $\sigma(X) = \sqrt{220 \times 0,05 \times (1 - 0,05)} = \sqrt{10,45} \approx 3,23$

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite, c'est à dire de paramètres 0 et 1.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	−1,55	−1,24	−0,93	−0,62	−0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$p(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	,0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question **b.**, une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement: « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

On calcule $p(7 \leq X \leq 15)$.

Or $(7 \leq X \leq 15) = (-4 \leq X - 11 \leq 4) = \left(\dfrac{-4}{\sqrt{10,45}} \leq \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) = \left(\dfrac{-4}{\sqrt{10,45}} \leq Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right)$.

Or $p\left(\dfrac{-4}{\sqrt{10,45}} \leq Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) = p\left(Z \leq \dfrac{4}{\sqrt{10,45}}\right) - p\left(Z < \dfrac{-4}{\sqrt{10,45}}\right)$.

Comme $\dfrac{4}{\sqrt{10,45}} \approx 1,237 \approx 1,24$, on obtient $p(7 \leq X \leq 15) = p(Z \leq 1,24) - p(Z < 1,24) = 0,892 - 0,108 = 0,784$

donc $p(7 \leq X \leq 15) = 0,78$ à 10^{-2} près.

Exercice 5

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre $0,9$ cm et $1,1$ cm.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A : "la bille a été fabriquée par la machine A" ;
B : "la bille a été fabriquée par la machine B" ;
V : "la bille est vendable".

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.

On calcule $p(A \cap V) = p(A)\, p_A(V)$.
Donc $p(A \cap V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588$.

2. Justifier que $p(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

On sait que $p(V) = 0,96$ puisque 96% de la production est vendable.
Alors comme A et B forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on obtient:

$$p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V)$$
$$p(B \cap V) = p(V) - p(A \cap V)$$
$$p(B \cap V) = 0,96 - 0,588$$
$$p(B \cap V) = 0,372.$$

Alors comme $p_B(V) = \dfrac{p(B \cap V)}{p(B)}$, on obtient $p_B(V) = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$. 93% de la production de la machine B sont donc vendables.

3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B. A-t-il raison ?

On cherche ici la proportion de billes produites par la mchine B parmi les billes non vendables. Déterminons donc $p_V(B)$.

On a $p_{\overline{V}}(B) = \dfrac{p\left(\overline{V} \cap B\right)}{p(\overline{V})} = \dfrac{p(B)\, p_B(\overline{V})}{0,04} = \dfrac{0,4 \times (1 - 0,93)}{0,04} = 0,7$. Le technicien a donc raison.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.
Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

La bille est vendable quand son diamètre est compris entre 0,9 et 1,1 cm. Ainsi la probabilité que la bille soit vendable est donnée par $p(0,9 \leq X \leq 1,1)$.
Comme X suit la loi $\mathcal{N}\left(1\,;\, 0,055^2\right)$, on obtient $p(0,9 \leq X \leq 1,1) \approx 0,930964 = 0,93$ au centième près.
C'est bien la probabilité déterminée dans la partie A.

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
Sachant que $p(0,9 \leq Y \leq 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

On a $p(0,9 \leq Y \leq 1,1) = p(-0,1 \leq Y - 1 \leq 0,1) = p\left(\dfrac{-0,1}{\sigma'} \leq \dfrac{Y-1}{\sigma'} \leq \dfrac{0,1}{\sigma'}\right)$.

Alors comme la variable aléatoire centrée réduite associée à Y, $\dfrac{Y-1}{\sigma'}$, suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$, on détermine le réel $u=\dfrac{0,1}{\sigma'}$ tel que $p(-u \leq Z \leq u)=0,98$ où
Z suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

On obtient $u \approx 2,05375$ d'où $\sigma'=0,049$ arrondi au millième.

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. la quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise des billes dans la production journalière.
Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attités par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.

a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Chacune des billes est peinte de manière aléatoire et équiprobable en l'une des 5 couleurs dont le noir.
Ainsi la probabilité qu'une bille soit peinte en noire est égale à $\dfrac{1}{5}$.
Alors l'expérience aléatoire qui consiste à choisir une bille noire est une expérience aléatoire à 2 issues dont le paramètre de succès est $\dfrac{1}{5}$.
Le choix de 40 billes, le remplissage étant assimilé à un tirage successif avec remise revient à la répétition de 40 expériences aléatoires identiques et indépendantes de même paramètre de succès $\dfrac{1}{5}$.
C'est donc un schéma de Bernoulli d'ordre 40 et de paramètre $\dfrac{1}{5}$.
Par conséquent la variable aléatoire N q ui compte le nombre de billes de couleur noire parmi les 40 billes suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(40\,;\,\dfrac{1}{5}\right)$.

On obtient donc $p(N=10)=\dbinom{40}{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}\left(1-\dfrac{1}{5}\right)^{40-10}=0,107$ arrondi à 10^{-3}.

b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?

La variable aléatoire N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(40;\,\dfrac{1}{5}\right)$.
L'échantillon est de taille $40 \geq 30$. De plus $40\times\dfrac{1}{5}=8\geq 5$ et $40\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=32\geq 5$.
Les conditions sont respectées pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

On obtient $I_f=\left[\dfrac{1}{5}-1,96\times\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{5}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)}}{\sqrt{40}};\ \dfrac{1}{5}+1,96\times\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{5}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)}}{\sqrt{40}}\right]=[0,076\,;\,0,323]$.

Or on a observé $f_{\text{obs}}=\dfrac{12}{40}=0,3\in I_f$.
Cette observation ne permet pas de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel est le nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Soit n un entier naturel.
La variable aléatoire N_n qui compte le nombre de billes noires dans un sachet de n billes suit la loi binomiale

$\mathcal{B}\left(n\,;\,\dfrac{1}{5}\right)$.

En effet, l'expérience revient à la répétition de n expériences aléatoires à deux issues, « la bille est noire » et « la bille n'est pas noire », indépendantes et identiques de même probabilité de succès $\dfrac{1}{5}$.

Ainsi la probabilité que parmi les n billes, il y ait au moins une noire est donnée par
$p(N_n \geq 1) = 1 - p(N_n = 0) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{5}\right)^n = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

On résout donc $p(N_n \geq 1) \geq 0,99$ d'où $1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \geq 0,99$. On obtient:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 0,01$$
$$n\log\left(\frac{4}{5}\right) \leq \log(0,01)$$
$$n \geq \frac{\log(0,01)}{\log\left(\frac{4}{5}\right)} \text{ puisque } \log\left(\frac{4}{5}\right) < 0.$$

Finalement il faut $n \geq 20,6$ d'où $n \geq 21$. Il faudra des sachets d'au moins 21 billes pour que cet objectif soit atteint.

Remarque: $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)} = \dfrac{-\ln(100)}{\ln(4) - \ln(5)} = \dfrac{2\ln(2) + 2\ln(5)}{\ln(5) - 2\ln(2)}$.

Exercice 6

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive. Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

L'expérience aléatoire de l'envoi d'une balle est une expérience aléatoire à 2 issues, « balle à droite » et « balle à gauche » dont la probabilité de succès est la probabilité de l'événement « balle à droite » de probabilité $\dfrac{1}{2}$.
Alors l'envoi de 20 balles, l'appareil les envoyant au hasard avec la même probabilités est la répétition de 20 expériences aléatoires indépendantes et identiques à 2 issues, de même probabilité de succès $\dfrac{1}{2}$.
C'est donc un schéma de Bernoulli d'ordre 20.
Par suite la variable aléatoire X qui compte le nombre de balles envoyées à droite parmi les 20 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

L'événement « le lance-balle envoie 10 balles à droite sur les 20 » est $(X = 10)$.
On obtient $p(X = 10) = \dbinom{20}{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{20-10} = \dbinom{20}{10} \times \dfrac{1}{2^{20}} \approx 0,176$.

2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

L'événement « le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite » est l'événement $(5 \leq X \leq 10)$.

On obtient $p(5 \leq X \leq 10) = \sum_{i=5}^{10} p(X=i) = \sum_{i=5}^{10} \binom{20}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20-i} = \frac{1}{2^{20}}\sum_{i=5}^{10}\binom{20}{i} \approx 0,582.$

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Il s'agit donc de déterminer si la fréquence de lancers à droite observée $f_{\text{obs}} = 0,42$ est une fréquence observée régulièrement sur un échantillon de 100 lancers.
Comme la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers à droite suit une loi binomiale, ici de paramètres 100 et $\frac{1}{2}$, comme $\begin{cases} 100 \geq 30 \\ 100 \times \frac{1}{2} \geq 5 \\ 100 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) \geq 5 \end{cases}$, alors on décide d'utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est ici

$$I_f = \left[\frac{1}{2} - 1,96 \times \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{100}} ; \frac{1}{2} + 1,96 \times \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{100}}\right] = [0,402 ; 0,598].$$

Alors $f_{\text{obs}} \in I_f$. Le joueur n'a pas à douter sur cet échantillon du bon fonctionnement de la machine.

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Notons D l'événement « la balle est envoyée à droite » et C l'événement « la balle est coupée ».
On cherche à déterminer $p_C(D)$.
On a $p_C(D) = \dfrac{p(C \cap D)}{p(C)} = \dfrac{p(C \cap D)}{p(C \cap D) + p\left(C \cap \overline{D}\right)}$.

Or on sait que la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235 donc $p\left(C \cap \overline{D}\right) = 0,235$.

D'autre part on sait que $p(D) = \frac{1}{2}$ et que $p\left(D \cap \overline{C}\right) = 0,24$ donc on en déduit que $p(D \cap C) = \frac{1}{2} - 0,24 = 0,26$.

Finalement $p_C(D) = \dfrac{0,26}{0,26 + 0,235} = 0,525$.