Lois continues de probabilités

Lois continues, lois uniformes, lois exponentielles, lois normales

1. Lois continues

1.1. Variables aléatoires continues

Les expériences aléatoires que nous avons étudiés jusqu'à présent présentaient un univers des possibles Ω fini dénombrable (on peut énumérer, numéroter comme pour une suite tous les éléments de l'ensemble).
Par exemple une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(n,\, p),\ \ n \in \mathbb{N},\ \ p \in]\,0;\, 1[$ est à valeurs dans l'ensemble $\{0;\, \ldots;\, n\}$.

L'exemple du jeu qui s'arrête lorsque l'on obtient 6 avec un dé équilibré dont les faces sont numérotées jusqu'à 6, est une expérience aléatoire à valeurs dans un ensemble infini dénombrable $\mathbb{N}^* = \{1;\, 2;\, \ldots\}$.
En effet, il peut y avoir autant de lancers que l'on veut avant d'obtenir 6, même si les événements se raréfient. Néanmoins, on ne parle pas de probabilités continues.
Une telle expérience reste une expérience de probabilités discrètes dans la mesure où les issues sont "isolées" les unes des autres.

Considérons maintenant que l'on mesure les tailles ou les poids d'une population d'un pays (quelques millions d'habitants ...).
Techniquement, expérimentalement, aucune personne n'est vraiment de la même taille. La mesure obtenue est sujette à la précision des instruments de mesure.
Ainsi, la variable aléatoire T qui à un individu de cette population associe sa taille est à valeurs dans un intervalle réel $[T_{\min};\, T_{\max}]$.
Cette fois l'ensemble des valeurs prises par X est dit infini non dénombrable. On ne peut plus comme dans le cas précédent énumérer les cas!
On parle alors de probabilités continues et de variables aléatoires continues.

On cherche à définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X pour une expérience aléatoire dont les issues sont des nombres réels compris dans un intervalle donné.

Par exemple:

- la loi de la variable aléatoire qui donne un nombre au hasard dans un intervalle **réel** donné,
- la loi de la variable aléatoire qui donne la taille d'un individu dans une population d'un pays,
- la loi de la variable aléatoire qui donne la durée de vie d'un atome radioactif,
- la variable aléatoire qui évalue le temps d'attente à un guichet,
- la position d'un électron autour de son noyau, ...

Définition:

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire associé à un univers Ω muni d'une probabilité p.
Une variable aléatoire continue X définie sur Ω est une fonction de Ω à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$:
$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ X(\omega) \in I \subset \mathbb{R}$.
Alors pour réels a et b de I, $a < b$, la probabilité que X prenne une valeur entre a et b se note $p(a \le X \le b)$ ou $p(X \in [a;\, b])$
On note aussi:

- $p(a < X < b) = p(X \in]\,a;\, b[)$, $p(a \le X < b) = p(X \in [a;\, b[)$ et $p(a < X \le b) = p(X \in]\,a;\, b])$
- $p(X \le a) = p(X \in]-\infty;\, a])$
- $p(X < a) = p(X \in]-\infty;\, a[)$
- $p(X \ge b) = p(X \in [b;\, +\infty[)$
- $p(X > b) = p(X \in]\,b;\, +\infty[)$

L'intervalle $X(\Omega) = I$ peut être borné ou non: $[a;\, b]$, $]\,a;\, b]$, $[a;\, b[$, $]-\infty;\, a]$, $]-\infty;\, a[$, $[b;\, +\infty[$, $]\,b;\, +\infty[$, $]-\infty;\, +\infty[$.

1.2. Variables aléatoires continues à densité

Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;\, b]$, $a \le b$.
La fonction f est appelé **fonction de densité** si:

i. pour tout réel $x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$

ii. $\int_a^b f(x)\, dx = 1$

Une **variable aléatoire continue** X suit la **loi de densité** f alors pour tout réel α, $\beta \in [a; b]$ avec $\alpha \leq \beta$,
$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$.

Remarques:

• la fonction f est supposée intégrable sur l'intervalle considérée.

Comme $\int_{x\in I} 0\, dx = 0$, on peut toujours prolonger la fonction de densité sur un intervalle plus grand, en posant $f(x) = 0$ pour $x \notin I$.

La fonction f peut être discontinue.

• l'intervalle I peut être borné ou non.

Dans le cas d'un intervalle non borné, on définit $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{X\longrightarrow+\infty} \int_a^X f(x)\, dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim\limits_{X\longrightarrow-\infty} \int_X^b f(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{Y\longrightarrow+\infty} \left(\lim\limits_{X\to-\infty} \int_X^Y f(x)\, dx \right)$.

Il va s'en dire que ce genre de calculs demandent des précautions. En particulier pour $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Les conditions de convergence des intégrales et leurs justifications seront développées dans les années d'études supérieures.

Propriété:

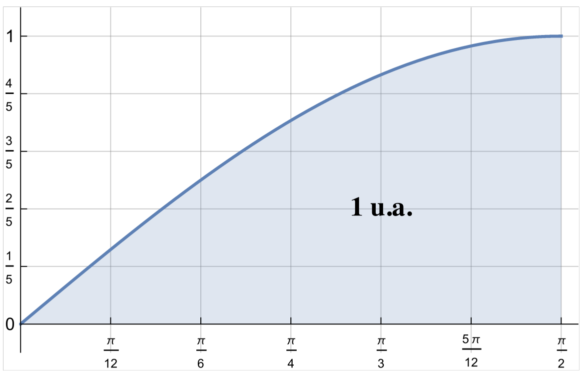
Soit X une variable continue suivant la loi de densité f sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors:
• pour tout réel $\alpha \in I$, $p(X = \alpha) = 0$
• pour tous réels α et β de I, $p(\alpha \leq X \leq \beta) = p(\alpha < X \leq \beta) = p(\alpha \leq X < \beta) = p(\alpha < X < \beta)$
En particulier, $p(X \geq \alpha) = p(X > \alpha)$ et $p(X \leq \beta) = p(X < \beta)$.
On dit qu'une loi à densité "ne charge pas les points".

1.3. Exemple

On considère la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq 0$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 1$.

Ainsi la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est une fonction de densité.



Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi de densité $x \longmapsto \sin(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Alors par exemple:

• $p\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{3}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

• $p_{\left(X\geq\frac{\pi}{4}\right)}\left(X \leq \frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{p\left(\left(X \geq \frac{\pi}{4}\right) \cap \left(X \leq \frac{\pi}{3}\right)\right)}{p\left(X \geq \frac{\pi}{4}\right)}$.

Or $\left(X \geq \frac{\pi}{4}\right) \cap \left(X \leq \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{3}\right)$ et $\left(X \geq \frac{\pi}{4}\right) = \overline{\left(X < \frac{\pi}{4}\right)}$ donc:

$$p_{\left(X\geq\frac{\pi}{4}\right)}\left(X \leq \frac{\pi}{3}\right) = \frac{p\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{3}\right)}{1 - p\left(X \leq \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\, dx}{1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\, dx} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{1 - \frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1.4. Espérance

Définition:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de densité f sur $[a; b]$.

Alors l'espérance de la variable aléatoire X est donnée par $E(X) = \int_a^b x \times f(x)\, dx$.

Exemple:

Dans le cas précédent, on obtient: $E(X) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x)\, dx = -x\cos(x) + \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

1.4. Fonction de répartition

Définition:

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f.
On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie sur $[a; b]$ par
$F(x) = p(a \leq X \leq x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Remarques:

- $F(a) = 0$ et $F(b) = 1$
- F est la primitive de f qui s'annule en a,
- F cumule les probabilités jusqu'à x. Elle correspond aux fréquences **cumulées** en probabilités.
- Dans la mesure où, le cas échéant, on peut prolonger la densité f sur $]-\infty; a[$ et sur $]b; +\infty[$ par $f(x) = 0$, on peut

définir la fonction de densité sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)\, dt$ pour toute variable aléatoire continue X suivant une loi de densité f.

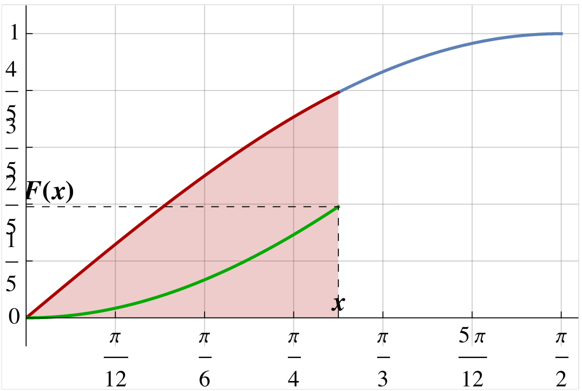
Propriété:

Une variable aléatoire X est uniquement déterminée par la donnée de sa fonction de répartition.

Autrement dit, connaître f ou F revient au même. En effet, on a $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X < a) = F(b) - F(a)$.

Exemple:

Dans le cas précédent, la fonction de répartition est donnée par $F(x) = \int_0^x \sin(t)\, dt = 1 - \cos(x)$ pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



Pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x)$ est donnée par la valeur de l'aire colorée.

2. Loi uniforme sur un intervalle borné

2.1. Définition

La loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$, $a < b$ est la loi qui prolonge la notion d'équiprobabilité d'un ensemble discret dénombrable, à un ensemble indénombrable, comme un intervalle.

Définition:

La variable aléatoire X à valeurs dans $[a; b]$, $a < b$, suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si sa fonction de densité est donnée par $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$.

La fonction de densité pour la loi uniforme est donc la fonction constante sur l'intervalle considéré dont la valeur permet d'obtenir une aire du rectangle de longueur $b - a$ égale à 1 u.a.

2.2. Propriétés

Propriété:

Ainsi pour tous réels $\alpha, \beta \in [a; b]$, $p(\alpha \leq X \leq \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$.

Preuve: laissée en exercice.

Propriété:

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a; b]$, $a < b$. Alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Preuve: laissée en exercice.

3. Loi exponentielle

3.1. Définition

La loi exponentielle de paramètre λ est la loi de probabilité qui modélise la décroissance radioactive par exemple.
On l'appelle aussi la loi de **durée de vie sans vieillissement**.
À chaque instant, la probabilité qu'un atome radioactif ne le soit plus est égale quelle que soit le temps écoulé depuis que l'atome est effectivement radioactif.

Définition:

Soit λ un réel **strictement positif**.
La variable aléatoire X à valeurs dans $[0; +\infty[$, suit la **loi exponentielle de paramètre λ** si sa fonction de densité est donnée par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ pour tout réel $x \geq 0$.

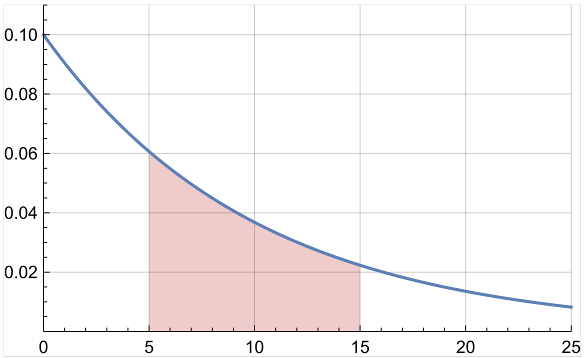
Il est clair que comme $\lambda > 0$, $\lambda\, e^{-\lambda x} > 0$ pour tout réel $x \geq 0$.

De plus pour tout réel $X \geq 0$, $\displaystyle\int_0^X \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x}\Big]_0^X = -e^{-\lambda X} - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right) = 1 - e^{-\lambda X}$.

Alors comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} -\lambda X = -\infty$ et comme $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ alors $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} e^{-\lambda X} = 0$ et ainsi $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \int_0^X \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1$.

La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$ définie une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$.

On a représenté ci-dessous la fonction de densité $x \longmapsto \dfrac{1}{10}\, e^{\frac{-x}{10}}$, densité de la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{10}$.



Ainsi, pour une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$,

$p(5 \leq X \leq 15) =$ aire colorée $= \displaystyle\int_5^{15} \frac{1}{10}\, e^{\frac{-x}{10}}\, dx = -e^{\frac{-x}{10}}\Big]_5^{15} = -e^{\frac{-15}{10}} - \left(-e^{\frac{-5}{10}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e\sqrt{e}}$.

Propriété:

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $[0; +\infty[$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
- pour tous réels α et β positifs avec $\alpha \leq \beta$, $p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$
- pour tout réel $x > 0$, $p(X \leq x) = p(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- pour tout réel $x > 0$, $p(X \geq x) = p(X > x) = e^{-\lambda x}$

Preuve: laissée en exercice.

3.2. Espérance:

Propriété:

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Preuve:

On calcule $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.

On pose $x \times \lambda e^{-\lambda x} = \left(\lambda\, e^{-\lambda x}\right) \times x = u'(x)\, v(x)$.

Alors on obtient $\begin{cases} u(x) = -e^{-\lambda x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Comme $(u\,v)'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$ alors $\left(x \times \left(-e^{-\lambda x}\right)\right)' = \lambda\, e^{-\lambda x} \times x - e^{-\lambda x} \times 1$ d'où $x \times \lambda\, e^{-\lambda x} = \left(-x\, e^{-\lambda x}\right)' + e^{-\lambda x}$.

Finalement, $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_0^a x\times\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^a \left(\left(-x\, e^{-\lambda x}\right)' + e^{-\lambda x}\right) dx$$
$$\int_0^a x\times\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^a \left(-x\, e^{-\lambda x}\right)' dx + \int_0^a e^{-\lambda x}\, dx$$
$$\int_0^a x\times\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \left[-x\, e^{-\lambda x}\right]_0^a + \left[\left(-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}\right)\right]_0^a$$
$$\int_0^a x\times\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \left(-a\, e^{-\lambda a} - 0\right) + \left(-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda a} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right)$$
$$\int_0^a x\times\lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\lambda\, a\, e^{-\lambda a}\right) - e^{-\lambda a}\right)$$

Or comme $\lambda > 0$, $\lim\limits_{a\to+\infty} (-\lambda\, a) = +\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} X\, e^X = 0$, alors $\lim\limits_{a\to+\infty} (-\lambda\, a)\, e^{-\lambda a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-\lambda a} = 0$.

Donc finalement, $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\left(1 - \left(\lambda\, a\, e^{-\lambda a}\right) - e^{-\lambda a}\right) = \frac{1}{\lambda}$ et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

3.3. Propriété de durée de vie sans vieillissement

Propriété:

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels $t \geq 0$ et $h \geq 0$, alors $p_{(X\geq t)}(X \geq t+h) = p(X = h)$.

Ainsi la probabilité qu'un individu soit « vivant » après l'instant $t+h$ sachant que l'individu est « vivant » après l'instant t, est indépendante de t.

Preuve:

On a $p_{(X\geq t)}(X \geq t+h) = \dfrac{p((X\geq t)\bigcap(X\geq t+h))}{p(X\geq t)}$.

Or $(X\geq t)\bigcap(X\geq t+h) = (X\geq t+h)$ donc $p_{(X\geq t)}(X \geq t+h) = \dfrac{p(X\geq t+h)}{p(X\geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+h)-(-\lambda t)} = e^{-\lambda h}$.

Illustration: cf exercices.

4. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

2.1. Théorème de Moivre-Laplace

Théorème:

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\, p)$ de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

On pose $Z_n = \dfrac{X_n - n\,p}{\sqrt{n\,p(1-p)}}$. Z_n s'appelle la variable centrée réduite associée à X_n.

Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$.

Preuve: hors programme.

Illustration:

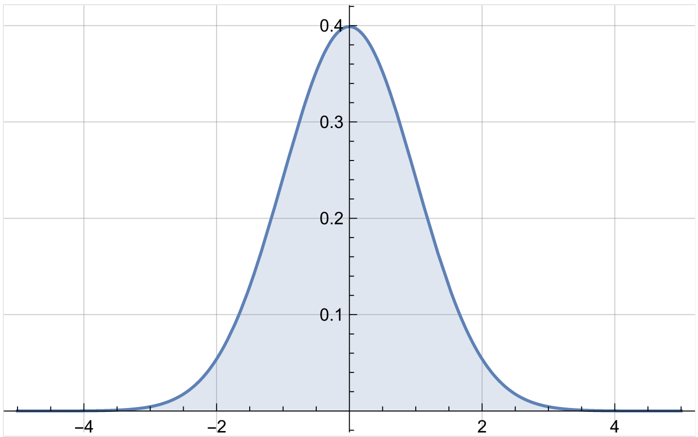
2.2. La loi normale centrée réduite.

Théorème-Définition

La fonction $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$ une fonction de densité.

En effet $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \lim_{x\longrightarrow+-\infty} \int_{x}^{0} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$ et $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\longrightarrow++\infty} \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}$.
La loi de probabilités de fonction de densité f est appelée la **loi normale centrée réduite**.
On la note $\mathcal{N}(0; 1)$.

Illustration:



Compte-tenu du théorème de Moivre-Laplace, on obtient que cette loi mesure la “normalité”.

On l’appelle cette courbe, la courbe en cloche ou encore une gaussienne, ou courbe de Gauss, en hommage à Karl Friedrich Gauss qui a considérablement contribué à sa découverte.

2.3. Propriétés

Propriété:

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.
Pour tout réel x, $p(X \geq x) = p(X \leq -x) = 1 - p(X \leq x)$

Preuve: il suffit d’appliquer la définition.

Propriété: Espérance et Variance

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. Alors $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

Preuve:

Pour l’espérance, on obtient $\forall a > 0$; $\int_{-a}^{a} x \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_{-a}^{a} -x\, e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left. e^{\frac{-x^2}{2}} \right]_{-a}^{a} = 0$.

Pour la variance, le résultat est admis.

2.4. Obtenir u_α

Théorème

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel u_α positif tel que $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.
En particulier $u_{0{,}01} \approx 2,58$ et $u_{0{,}05} = 1,96$.

Preuve:

Remarquons que pour tout réel $t > 0$, $p(-x \leq X \leq x) = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ avec $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$, par parité de f.

Or la fonction $\Phi : x \longmapsto 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ est continue puisque dérivable et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ à valeurs dans $\left[\Phi(0); \lim_{x\longrightarrow+\infty} \Phi(x)\right[= [0; 1[$. .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $1-\alpha \in]0;1[$, il existe donc un unique réel u_α tel que $\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$.

Les valeurs de u_α s'obtiennent à la calculatrice en utilisant la fonction inverse de la fonction donnant la loi normale.

4. Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

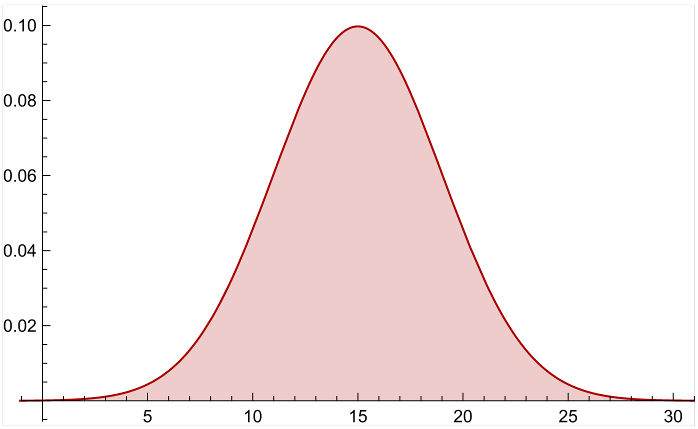
2.1. Définition

Définition:

Soit μ et σ deux réels strictement positifs.

La variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$, suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
La variable aléatoire Z est appelée la variable aléatoire centrée réduite de X.

Illustration:



La courbe admet la droite d'équation $x=\mu$ comme axe de symétrie.
La valeur de σ est reliée à l'étalement de la courbe. Plus σ est petit, plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie.

2.2. Propriétés

Propriété: Espérance et Variance

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. Alors $E(X)=\mu$ et $V(X)=\sigma^2$

Preuve: admis.

Propriété:

Soit X une variable aléatoire continue suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. Alors:
- $p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 0,683$;
- $p(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 0,954$;
- $p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 0,997$

Preuve: admis.