Nombres Complexes 2

Argument

1. Définition

Soit $z = x + i\,y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe **non nul**.

Un argument du nombre z ,noté $\arg(z)$, est tout nombre **réel** tel que $\begin{cases} \cos(\arg(z)) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\arg(z)) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$.

Un tel nombre existe.

En effet comme $-1 \le \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \le 1$, il existe au moins un réel θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$.

On sait aussi que tout réel θ' tel que $\cos(\theta') = \cos(\theta)$ est tel que $\theta' = \theta \ \ (2\pi)$ ou que $\theta' = -\theta \ \ (2\pi)$.

On sait alors que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ d'où $\sin^2(\theta) = 1 - \left(\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)^2 = \dfrac{|z|^2 - \mathrm{Re}(z)^2}{|z|^2} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)^2}{|z|^2}$.

Par suite $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ si $\mathrm{Im}(z) \ge 0$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ si $\mathrm{Im}(z) < 0$.

Finalement si $\mathrm{Im}(z) \ge 0$, le réel $\arg(z) = \theta$ convient et si $\mathrm{Im}(z) < 0$, le réel $\arg(z) = -\theta$ convient. Donc il existe toujours au moins un réel vérifiant le système proposé.

Un nombre complexe admet une infinité d'argument:

Si θ et θ' sont deux arguments du même nombre complexe z, alors $\theta' = \theta + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ ou encore $\theta' = \theta \ \ (2\pi)$.

On définit alors **l'Argument** ou **Argument principal** du nombre complexe z , noté $\mathrm{Arg}(z)$ comme l'unique argument de z de l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$.

⚠ Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument: c'est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Exemples:

• $\arg(1) = 0 \ \ (2\pi)$ • $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2} \ \ (2\pi)$

• $\arg(-2-2\,i)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\arg(-2-2\,i)) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\arg(-2-2\,i)) = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Or $\begin{cases} \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\arg(-2-2\,i) = -\dfrac{3\pi}{4}$.

• on a $-1 + \sqrt{3}\ i = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ et $\left|-1 + \sqrt{3}\ i\right| = 2$.

Ainsi on obtient directement que $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}\left(-1+\sqrt{3}\ i\right)}{\left|-1+\sqrt{3}\ i\right|} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \\ \dfrac{\mathrm{Im}\left(-1+\sqrt{3}\ i\right)}{\left|-1+\sqrt{3}\ i\right|} = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$. On en déduit donc $\arg\left(-1+\sqrt{3}\ i\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$.

• En général, on "retombera" sur des angles remarquables.
Dans le cas contraire, on doit alors donner une valeur approchée à la calculatrice de l'argument, si celui-ci est demandé, sachant que l'angle est complètement déterminé par la donnée de son cosinus et de son sinus.
Déterminons un argument de $2+3\,i$.

On sait alors que $\begin{cases} \cos(\arg(2+3\,i)) = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \\ \sin(\arg(2+3\,i)) = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$. On obtient $\arg(2+3\,i) \approx 0,983$ radians.

Remarquons $\cos(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ amène $\theta \approx 0,983$ ou $\theta \approx -0,983$ alors que $\sin(\theta) = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ amène $\theta \approx 0,983$ ou $\theta \approx \pi - 0,983$.
C'est donc le couple (cosinus, sinus) qui permet de conclure.

⚠ ***Remarque:*** Il faut absolument le couple (cosinus ; sinus). Un seul des 2 est insuffisant pour déterminer un argument.

2. Propriétés

Soit z et z' des nombres complexes **non nuls**, k un nombre réel non nul.

• $\arg(z) = 0\ (\pi)$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ • $\begin{cases} \arg(z) = 0\ (2\pi) & \text{si et seulement si} \quad z \in \mathbb{R}^{+*} \\ \arg(z) = \pi\ (2\pi) & \text{si et seulement si} \quad z \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

• $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ si et seulement si $z \in i\,\mathbb{R}$ • $\begin{cases} \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) & \text{si et seulement si} \quad z \in i\,\mathbb{R}^{+*} \\ \arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) & \text{si et seulement si} \quad z \in i\,\mathbb{R}^{-*} \end{cases}$

• $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ (2\pi)$ • $\arg\left(\bar{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$

• $\arg(k\,z) = \begin{cases} \arg(z)\ (2\pi) & \text{si } k>0 \\ \pi + \arg(z)\ (2\pi) & \text{si } k<0 \end{cases}$

• $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$

• $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$ • $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$

• $\arg(z^n) = n\arg(z)\ (2\pi)$ pour tout entier relatif n.

⚠ **Aucune propriété pour l'argument de la somme de nombres complexes.**

Preuve:

Exemples:

• $\arg\left(\left(1+\sqrt{3}\ i\right)(1+i)\right) = \arg\left(1+\sqrt{3}\ i\right) + \arg(1+i) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}\ (2\pi)$.

• $\arg\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+i}\right) = -\arg\left(\sqrt{3}+i\right) = -\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

• $\arg\left((1+i)^{10}\right) = 10\arg(1+i) = 10\times\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$.

…

3. Lecture géométrique

Pour tout point M d'affixe z , $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z) \ \ (2\pi)$.

Pour tout vecteur $\vec{U}$ d'affixe $z_{\vec{U}}$, $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{U}\right) = \arg\left(z_{\vec{U}}\right)$.

Pour tous points A et B d'affixes z_A et z_B , $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)$.

Preuve :

Remarque:
On peut justifier autrement. On profite ici de l'occasion pour rappeler un résultat intéressant du produit scalaire.

Souvent, l'argument d'un nombre complexe z est défini de manière géométrique, comme l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point du plan d'affixe z.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$,

$$\left(\vec{U}\ ;\ \vec{V}\right) = \arg\left(\frac{z_{\vec{V}}}{z_{\vec{U}}}\right) \ \ (2\pi) = \arg\left(z_{\vec{V}}\right) - \arg\left(z_{\vec{U}}\right) \ \ (2\pi) .$$

Pour tous points A, B, C et D d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D avec $A \neq B$, on a

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \ \ (2\pi) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \ \ (2\pi) .$$

Preuve :

Les formes trigonométriques et exponentielles

1. La forme trigonométrique

Remarquons que pour tout nombre complexe z non nul, d'écriture algébrique $x + i\,y$, on a

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\,\frac{y}{|z|}\right) = |z|\,(\cos(\arg(z)) + i\,\sin(\arg(z))).$$

En posant $|z| = r$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta = \arg(z) \ \ (2\pi)$, on obtient que tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))$.

On appelle **écriture trigonométrique** d'un nombre complexe **non nul** z, l'unique écriture à 2π près

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)) \text{ où } \begin{cases} \rho = |z| \in \mathbb{R}^{+*} \\ \theta = \arg(z) \ \ (2\pi) \end{cases} .$$

Conséquence: Deux nombres complexes **non nuls** sont **égaux** si et seulement s'ils ont le **même module** et le **même argument**, à 2π près.

Vérifions que cette écriture est unique, à 2π près.
Supposons que $z = r(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)) = r'\,(\cos(\theta') + i\,\sin(\theta'))$.
Remarquons tout d'abord que $|\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)| = 1$ pour tout réel θ.

En effet $|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = \sqrt{(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2} = \sqrt{1} = 1$.
Ainsi on a $|r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))| = |r|\,|\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = r \times 1 = r$ puisque $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et de même
$|r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))| = |r'|\,|\cos(\theta') + i\sin(\theta')| = r' \times 1 = r'$ puisque $r' \in \mathbb{R}^{+*}$.
Finalement on en déduit donc $|z| = r = r'$: $r = r'$.

Par suite on a donc $\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \cos(\theta') + i\sin(\theta')$ d'où $\begin{cases} \cos(\theta) = \cos(\theta') \\ \sin(\theta) = \sin(\theta') \end{cases}$ d'où $\theta' = \theta \quad (2\pi)$.

Exemples:

- $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
- $5 = 5\,(\cos(0) + i\sin(0))$
- $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
- $-3 + \sqrt{3}\,i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

2. la forme exponentielle

Définition de la notation exponentielle: on **note** pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Commentaire: C'est juste une notation!! C'est un moyen pratique pour simplifier l'écriture trigonométrique qui est "longue" à écrire et en ce sens, difficile à manipuler.

On obtient alors que tout nombre complexe z **non nul** s'écrit de manière unique, à 2π près, sous la forme, dite **écriture ou forme exponentielle** $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ (2π).

Remarque: Tout nombre complexe z non nul, est ainsi associé à un nombre complexe de module 1:
$e^{i\theta} = e^{i\arg(z)}$.

La notation sous forme de puissance du nombre e appelé nombre d'Euler (qui est un nombre réel) a été choisie par **analogie**, et n'a pas de justification en soi, avec les propriétés des puissances et de la fonction exponentielle, à savoir: $f(a+b) = f(a) \times f(b)$(l'image de la somme de deux nombres est le produit des images de ces 2 nombres).
Ainsi $x^a \times x^b = x^{a+b}$ et $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ comme pour la fonction argument: $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z')$.

Exemples:

- $1 = e^{i0}$; $-1 = e^{i\pi}$; $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$
- Soit r un réel strictement positif:

  $r\,e^{i0} = r + 0\,i \in \mathbb{R}^{+*}$ $\qquad$ $r\,e^{i\pi} = -r + 0\,i \in \mathbb{R}^{-*}$

  $r\,e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 + r\,i$ $\qquad$ $r\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = 0 - r\,i$
- $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $1 - i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $\qquad$ $-1 + i = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}}$ $\qquad$ $-1 - i = \sqrt{2}\,e^{-\frac{3i\pi}{4}}$
- $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad$ $\sqrt{3} + i = 2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $1 + e^{i\pi} = 0$ …

Remarque: On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 ($\mathbb{U}$ pour unité). On a ainsi
$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{e^{i\theta};\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

3. Propriétés de la forme exponentielle

Les propriétés suivantes sont juste une relecture des propriétés du module et de l'argument réécrites avec la forme exponentielle.

Soit $z = \rho\,e^{i\theta}$ et $z' = \rho'\,e^{i\theta'}$ avec ρ, ρ' des réels strictement positifs et θ et θ' des réels.

- $-z = \rho\,e^{i(\theta+\pi)}$ $\qquad$ • $\bar{z} = \rho\,e^{-i\theta}$
- $z\,z' = \rho\,e^{i\theta} \times \rho'\,e^{i\theta'} = (\rho\,\rho')\,e^{i(\theta+\theta')}$

- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho\, e^{i\,\theta}} = \dfrac{1}{\rho}\, e^{-i\,\theta}$
- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho\, e^{i\,\theta}}{\rho' e^{i\,\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}\, e^{i\,(\theta-\theta')}$
- $z^n = \left(\rho\, e^{i\,\theta}\right)^n = \rho^n\, e^{i\,n\,\theta}$

Remarque: La forme exponentielle (ou trigonométrique) est particulièrement adaptée pour déterminer les produits, quotients ou puissances de nombres complexes.

Exemples:

- $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)(1-i) = 2\,e^{i\,\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\,e^{-i\,\frac{\pi}{4}} = 2\,\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{\pi}{12}}$.

💡 on peut ainsi obtenir des valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

En effet $\left(1+\sqrt{3}\,i\right)(1-i) = \left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Par suite on en déduit l'égalité $2\,\sqrt{2}\,e^{i\,\frac{\pi}{12}} = \left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(\sqrt{3}-1\right)$ d'où $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\,\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\,\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

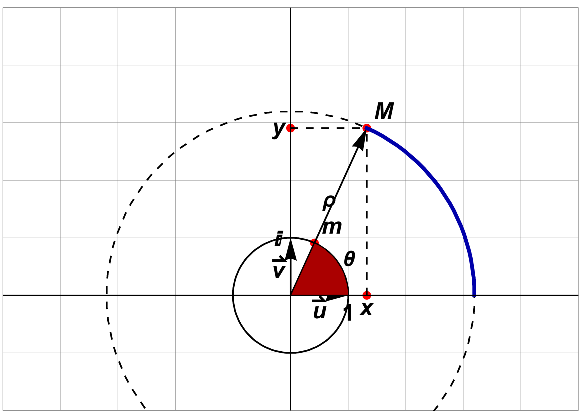
- $(1-i)^{10} = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\,\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10} e^{-10\,i\,\frac{\pi}{4}} = 2^5\,e^{-i\,\frac{5\pi}{2}} = 32\,e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = -32\,i$ . ...

4. Représentation polaire :

L'écriture algébrique d'un nombre complexe s'interprète comme les coordonnées cartésiennes d'un point du plan: la partie réelle est associée à l'abscisse et la partie imaginaire associée à l'ordonnée.
L'écriture trigonométrique ou exponentielle revient à donner un couple (module ; argument).

Alors comme pour tout point M d'affixe z, $O\,M = |z|$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{O\,M}\right) = \arg(z)\ \ (2\,\pi)$, le couple $(|z|\ ;\ \arg(z))$ est un couple de coordonnées polaires du point M dans le repère polaire $\left(O\ ;\ \vec{u}\right)$.

Tout point M du plan distinct de l'origine O, d'affixe z non nulle est ainsi l'image d'un point m d'affixe $e^{i\,\arg(z)}$ du cercle unité par l'homothétie de centre O et de rapport $|z|$.



M point d'affixe z avec $z=x+iy=\rho e^{i\theta}$

5. De la multiplication par $e^{i\theta}$:

Soit M un point du plan complexe, distinct de l'origine, d'affixe z.
On considère le point M' d'affixe $z' = z \times e^{i\,\theta}$.

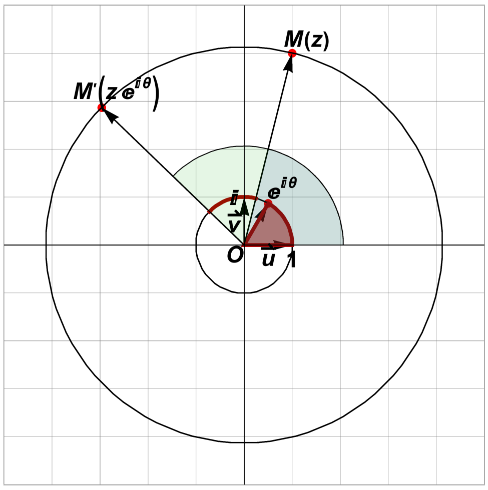
Alors on a $OM' = |z'| = |z|\left|e^{i\theta}\right| = |z| = OM$ et

$\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = \arg(z') = \arg(z) + \arg\left(e^{i\theta}\right) = \arg(z) + \theta \ \ (2\pi) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) + \theta \ \ (2\pi)$ d'où $\left(\overrightarrow{OM}; \ \overrightarrow{OM'}\right) = \theta \ \ (2\pi)$.

Finalement le point M' est sur le cercle de centre O et de rayon M et tel que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}; \ \overrightarrow{OM'}\right) = \theta \ \ (2\pi)$.

C'est donc l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle θ.

On obtient ainsi une interprétation géométrique directe de la multiplication par $e^{i\theta}$: cela revient à une rotation de centre O et d'angle θ.

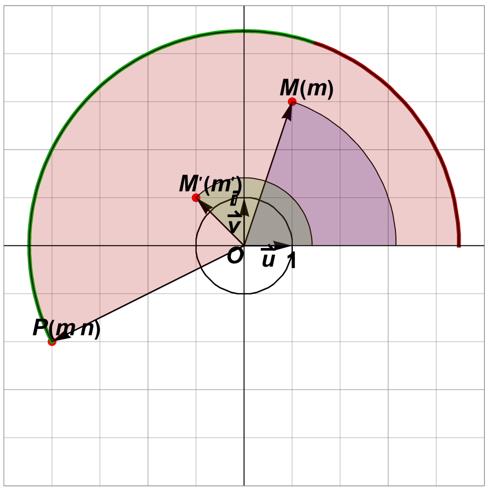


Conséquences: construction géométrique du produit

Soit M et N deux points du plan, distincts de l'origine, d'affixes respectives $m = \rho\, e^{i\theta}$ et $n = \rho'\, e^{i\theta'}$.

Alors le point P d'affixe $p = m\, n$ est l'image par l'homothétie de centre O et de rapport $\rho\,\rho'$ du point du cercle unité d'affixe $e^{i(\theta+\theta')}$.

On obtient un moyen géométrique de construire le point associé à un produit. (*Rappelons qu'avec le théorème de Thalès, par exemple, on sait multiplier à la règle et au compas deux nombres réels*.)



$(1 + 3\,i)\times(-1 + i) = -4 - 2\,i$

Compléments

1: Interprétations géométriques: lieux de points.

A. Égalité de longueurs:

Le cercle: l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-\omega| = r$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .

La médiatrice: L'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = 1$ ou $|z-b| = |z-a|$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$ est la médiatrice du segment $[A\,B]$.

***Hors programme:* La ligne de niveau $\dfrac{AM}{BM} = k$; $k \in \mathbb{R}^{+*} \backslash \{1\}$.**

On pose G_1 le barycentre du système $\{(A\ ;\ 1\}; (B\ ;\ k)\}$ et G_2 celui du système $\{(A\ ;\ 1); (B\ ;\ -k)\}$: G_1 et G_2 sont les points du plan tels que $1\,\overrightarrow{AG_1} + k\,\overrightarrow{BG_1} = \vec{0}$ et $1\,\overrightarrow{AG_2} - k\,\overrightarrow{BG_2} = \vec{0}$.
(Il faut faire un dessin avec des k choisis …)

On rappelle que la ligne de niveau $\dfrac{AM}{BM} = k$ est alors le cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$.

Ainsi l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k$ ou $|z-a| = k\,|z-b|$ avec $k \in \mathbb{R}^{+*} \backslash \{1\}$ est le cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$ avec G_1 et G_2 les points d'affixe respectives $g_1 = \dfrac{1}{1+k}(a+k\,b)$ et $g_2 = \dfrac{1}{1-k}(a-k\,b)$.

Rappel: pour cette ligne de niveau, on utilise le produit scalaire.

On écrit $\dfrac{AM}{BM} = k,\ k \neq 1$ équivaut à $(\overrightarrow{AM})^2 - k^2(\overrightarrow{BM})^2 = 0$ d'où $\left(\overrightarrow{AM} + k\,\overrightarrow{BM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AM} - k\,\overrightarrow{BM}\right) = 0$ puis $(1+k)\,\overrightarrow{G_1M}\cdot(1-k)\,\overrightarrow{G_2M} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{G_1M}\cdot\overrightarrow{G_2M} = 0$.
Le triangle $M\,G_1\,G_2$ est rectangle en M. Le point M est donc un point du cercle de diamètre $[G_1\,G_2]$.

B. Colinéarité, parallélisme et alignement:

- **Colinéarité et parallélisme:**

Deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{V} = k\,\vec{U}$.
Par suite, on obtient les caractérisations complexes :

Les vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si

- $\dfrac{z_{\vec{V}}}{z_{\vec{U}}} = k \in \mathbb{R}^*$ ou • $\arg\left(\dfrac{z_{\vec{V}}}{z_{\vec{U}}}\right) = 0\ \ (\pi)$.

Avec des points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si:

- $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}^*$ ou • $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0\ \ (\pi)$.

Avec des points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, les droites $(A\,B)$ et $(C\,D)$ sont parallèles si et seulement si:

• $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}^*$ ou • $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0 \ (\pi)$.

■ **Alignement:**

On rappelle que trois points A, B et M sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
On en déduit les caractérisations:

Les points A, B et M sont alignés avec $A \neq B$ et $A \neq M$ si et seulement si:
• $\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}^*$ ou • $\arg\left(\dfrac{z_M - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \ (\pi)$.

Remarques:
• On a l'égalité des arguments modulo π et non modulo 2π pour tenir compte des réels négatifs et donc des vecteurs de sens différents.
• Le cas où un des vecteurs est nul ne demande pas de caractérisation.
De plus pour pouvoir utiliser les arguments, il faut des nombres complexes non nuls.

C. Orthogonalité:

Deux vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\vec{U}\,;\,\vec{V}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$.

Par suite, on obtient les caractérisations complexes:

Les vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si:
• $\arg\left(\dfrac{z_{\vec{V}}}{z_{\vec{U}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$ ou • $\dfrac{z_{\vec{V}}}{z_{\vec{U}}} = i\,b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

Avec des points A, B, C et D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si et seulement si:
• $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ (\pi)$ ou • $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = i\,b$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

Exemple:
Soit les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 - i$, $b = 1 + 3\,i$ et $c = 5$.
On a $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{4 - 3\,i}{3 - 4\,i} = \dfrac{4 - 3\,i}{-i(4 - 3\,i)} = \dfrac{1}{-i} = i$.
Ainsi on peut en déduire $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = |i| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$ d'où $\dfrac{BC}{BA} = 1$ c'est à dire $BC = BA$ et
$\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ (2\pi)$.
Le triangle BAC est donc rectangle isocèle direct en B.

2. Racines n-ièmes de l'unité.

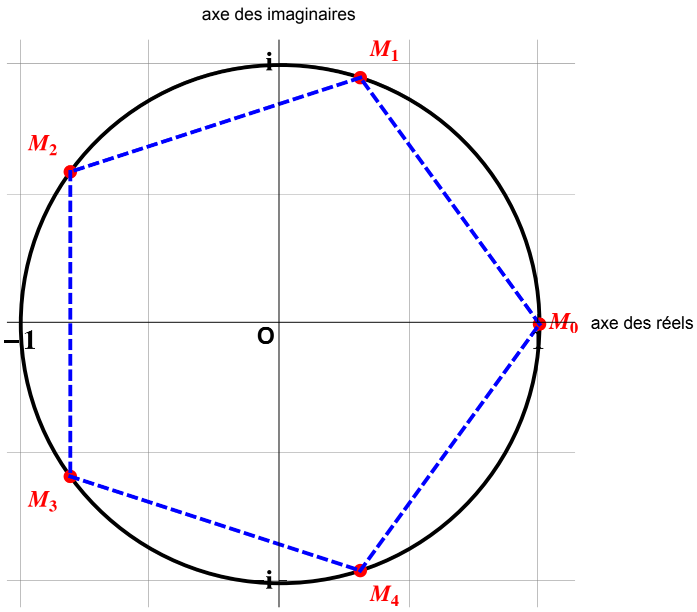
Soit n un entier naturel.
On considère l'équation $z^n = 1$.
On pose $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et on obtient donc $r^n\,e^{i\,n\,\theta} = 1\,e^{i\,0}$.
Par suite on a $\begin{cases} r^n = 1 \\ n\,\theta = 0 + 2\,k\,\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
Partant $r = 1$ et $\theta = \dfrac{2\,k\,\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$.

On obtient alors n solutions distinctes: $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}};\ k = 0 \text{ à } n-1\right\}$. Ce sont les racines n-ièmes de l'unité.

Une simple factorisation montre que $z^n - 1 = (z-1)\left(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\right)$ et donc que toute solution distincte de 1 de l'équation $z^n = 1$, vérifie aussi $1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = 0$.

Illustration des solutions:

À tout réel k allant de 0 à $n-1$, on associe le point M_k d'affixe $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
Alors les points $(M_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

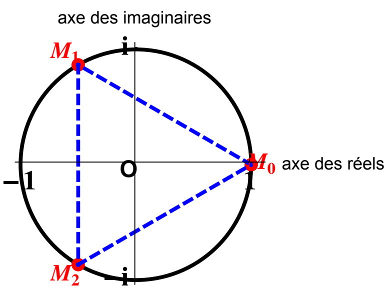


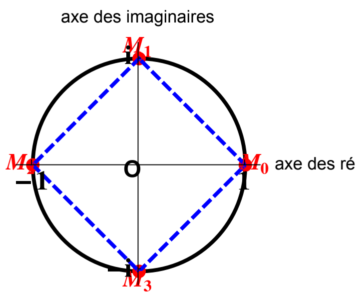
Cas particuliers:

- $n = 2$: on retrouve les solutions 1 et -1.
- $n = 3$: Les sommets sont souvent notées 1, j et j^2

avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
On a par exemple
$j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.

- $n = 4$: les solutions sont $1, -1, i$ et $-i$.





3. Trigonométrie

Tous les résultats de cette partie viennent des propriétés $e^{i\alpha}\, e^{i\theta} = e^{i(\alpha+\theta)}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ et de la définition $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

A: Formule d'Euler

Pour tout entier n et tout réel θ, $\cos(n\,\theta) = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ et $\sin(n\,\theta) = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2\,i}$.

En particulier pour $n = 1$, pour tout réel θ, $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i}$.

B: Formule de Moivre

Pour tout entier n et tout réel θ, on a $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\,\theta) + i\sin(n\,\theta)$.

Il suffit de rappeler $\left(e^{i\,\theta}\right)^n = e^{i\,n\,\theta}$.

C: Linéarisation

On retrouve les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus en lisant les parties réelles et imaginaires des nombres complexes $e^{i\,\alpha}\,e^{i\,\theta}$ et $e^{i\,(\alpha+\theta)}$.

$\mathrm{Re}\left(e^{i\,(\alpha+\theta)}\right) = \cos(\alpha+\theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i\,\alpha}\,e^{i\,\theta}\right)$
$\mathrm{Im}\left(e^{i\,(\alpha+\theta)}\right) = \sin(\alpha+\theta) = \cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{i\,\alpha}\,e^{i\,\theta}\right)$

De même pour $\alpha-\theta$:
$\mathrm{Re}\left(e^{i\,(\alpha-\theta)}\right) = \cos(\alpha-\theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i\,\alpha}\,e^{-i\,\theta}\right)$
$\mathrm{Im}\left(e^{i\,(\alpha-\theta)}\right) = \sin(\alpha-\theta) = -\cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{i\,\alpha}\,e^{-i\,\theta}\right)$

Pour la duplication, comme $e^{i\,\theta}\,e^{i\,\theta} = e^{2\,i\,\theta}$:
$\cos(2\,\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$ et $\sin(2\,\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

Enfin, on en déduit aussi facilement:

$\cos(\alpha)\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha-\theta))$, $\sin(\alpha)\sin(\theta) = \frac{1}{2}(-\cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha-\theta))$ et

$\sin(\alpha)\cos(\theta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha-\theta))$