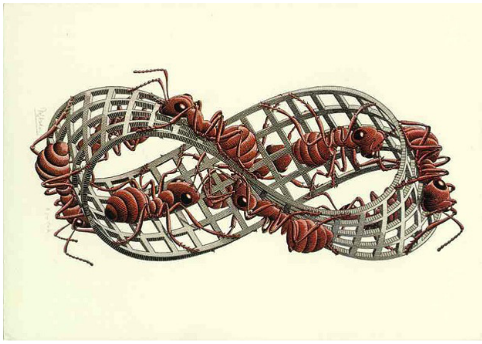
Épisode 3: Limite de suites



Suites convergentes et divergentes

Il s'agit ici d'étudier le comportement d'une suite quand n tend vers $+\infty$ c'est à dire lorsque n prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.

Définition (suites convergentes)

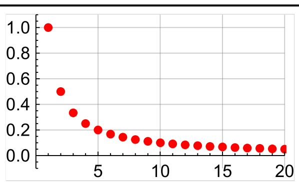
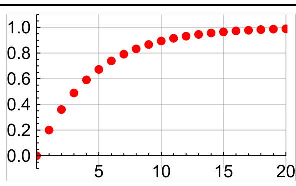
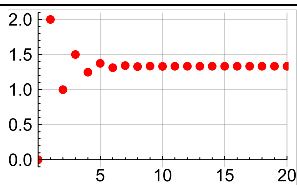
Définition: Soit ℓ un réel et (u_n) une suite numérique.
On dit que la suite (u_n) **converge** vers ℓ ou que la suite (u_n) est **convergente** vers ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell, \ell \in \mathbb{R}$.

Définition: La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un rang n_ϵ tel que si $n \geq n_\epsilon$ alors $|u_n - \ell| < \epsilon$.

Conséquence:

Théorème: Soit (u_n) une suite convergente. Alors sa limite est unique.

Illustration

$u_n = \frac{1}{n}$	$u_n = 1-(0.8)^n$	$u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 2$ et $u_0=0$
		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{3}$

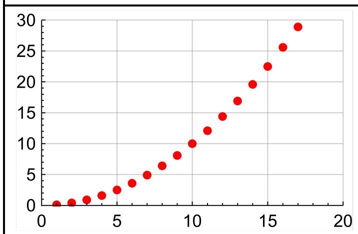
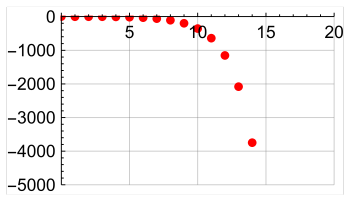
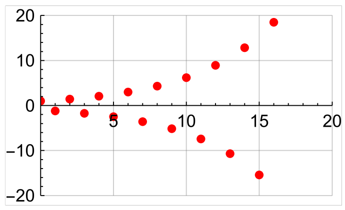
Définition (suites divergentes)

Définition: On dit qu'une suite **diverge** ou qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Définition: On dit que la limite de la suite est $+\infty$ (resp $-\infty$) , ou encore que la suite diverge en $+\infty$ (resp en $-\infty$) si et seulement si tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ (resp $]-\infty; M[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Sinon on n'écrit rien, la limite de la suite (u_n) n'existe pas.

Illustration

$u_n = \frac{n^2}{10}$	$u_{n+1} = 1{,}8u_n - 0{,}8$ et $u_0 = 0$	$u_n = (-1.2)^n$
		
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

Retenons un cas particulier de suite divergente qui ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$: la suite $(-1)^n$.

Limites de références

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ pour tout entier naturel p non nul.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ pour tout entier naturel p non nul.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

• **Suites géométriques**:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ pour tout réel a tel que $a > 1$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ pour tout réel a tel que $-1 < a < 1$.

Attention: Pour tout réel a tel que $a \leq -1$, la suite (a^n) diverge.

Opérations

Somme

En général, la limite de la somme de deux suites est la somme des limites de ces deux suites, suivant les règles décrites dans le tableau ci-dessous.

Limite de la suite (u_n) / Limite de la suite (v_n)	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

On a noté dans le tableau **"FI" pour "forme indéterminée"**. Il s'agit d'indiquer ici que l'on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat en utilisant le point de vue de la somme. Cette forme indéterminée est souvent notée $\infty - \infty$.

Retenons les exemples triviaux illustrant ce problème d'indétermination:

• $u_n = n$ et $v_n = -n$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On a pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = n + (-n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 0$.

• $u_n = 2n$ et $v_n = -n$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On a pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 2n + (-n) = n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$.

• $u_n = n$ et $v_n = -2n$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On a pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = n + (-2n) = -n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = -\infty$.

On a ainsi trois cas de figures ayant les mêmes données, mais dont le résultat obtenu est différent: c'est ce qu'on appelle une indétermination.

Produit

En général, la limite du produit de deux suites est le produit des limites de ces deux suites, suivant les règles décrites dans le tableau ci-dessous.

Limite de la suite (u_n) / Limite de la suite (v_n)	$\ell \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ell \in \mathbb{R}^{-*}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$	$\ell \times \ell'$	$\ell \times \ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

F.I. On notera dans le cas du produit la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Inverse

En général, la limite de l'inverse d'une suite est l'inverse de la limite de cette suite, suivant les règles décrites dans le tableau ci-dessous.

Limite de la suite (u_n)	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
Limite de la suite $(\frac{1}{u_n})$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Quotient

En général, la limite du quotient de deux suites est le quotient des limites de ces deux suites, suivant les règles décrites dans le tableau ci-dessous.

Limite de la suite (u_n) / Limite de la suite (v_n)	$\ell \in \mathbb{R}^{+*}$	$\ell \in \mathbb{R}^{-*}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
0^-	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	FI	FI
$-\infty$	0	0	0	FI	FI

On rencontre dans le cas du quotient deux cas de formes indéterminées: $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Remarquons aussi que le quotient de deux suites revient au produit de l'une par l'inverse de l'autre. On peut donc raisonner par étapes, c'est à dire, dans un premier temps déterminer la limite de l'inverse puis la limite du produit.

Encadrement

1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_n \leq M$ (resp $u_n \geq m$) alors si de plus la suite est convergente, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq M$ (resp $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq m$).

2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang,, $u_n \leq v_n$. Alors

- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (resp $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (resp $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \in \mathbb{R}, \ell \leq \ell'$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3. Théorème des gendarmes.
Soit des suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que pour tout entier naturel n à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$ (c'est à dire que les deux suites convergent vers ℓ a même limite), alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

Exemples

Nous donnerons ici quelques exemples d'applications des résultats précédents ainsi que des exemples nécessitant un travail préliminaire (suites définies par récurrence).

Calcul direct.

Calculer les limites des suites suivantes, si elles existent.

• $\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n+n)$; • $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1-0.5^n$; • $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2}{n+1}$

Suites du type $u_n = f(n)$.

Déterminer les limites, si elles existent des suites suivantes:

• $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n}$; • $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-n+1}{2n+1}$; • $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

En déterminant une forme explicite.

• Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2}{u_n+1}$ et $u_0=0$.

Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-2}$ est géométrique de raison -3.

En déduire que pour tout n, $u_n = 2\times\dfrac{v_{n+1}}{v_n-1}$ et donc $u_n=2\times\dfrac{(-3)^n-1}{(-3)^n+1}=2\times\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$ puis la limite de la suite (u_n).

• Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+3u_n}$ et $u_0=4$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

On pose alors $v_n=\dfrac{1}{u_n}$. Montrer que cette suite est arithmétique puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n et sa limite.

Astuces.

◊ Démontrer que la suite $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente en utilisant le théorème des gendarmes.

◊ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)$.

Exercice

Dans un village, l'association de gymnastique volontaire possédait 50 adhérents en 2000.
Depuis cette date, la trésorerie a remarqué que chaque année elle reçoit 18 nouvelles adhésions et que 85% des anciens inscrits renouvellent leur adhésion.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2000+n$.
On a donc $a_0 = 50$ et $a_{n+1} = 0,85\, a_n + 18$ pour tout entier naturel n.

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 120$ pour tout $n \geq 0$.
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $a_n = 120 - 70 \times 0,85^n$.
c. Déterminer la limite de la suite (a_n) quand n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat.

2. Chaque semaine, 60% des adhérents s'inscrivent pour une heure de gymnastique et 40% pour deux heures de gymnastique.
a. Exprimer en fonction de n, le nombre d'heures de gymnastique à prévoir par semaine pour l'an $2000+n$.
b. Une séance de gymnastique dure une heure et est limitée à 20 personnes.
On veut déterminer à partir de quelle année l'association devra prévoir plus de 8 séances par semaine. Démontrer qu'alors n doit vérifier l'inéquation $98 \times 0,85^n < 8$.
Résoudre cette inéquation et conclure.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Cas des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

◊ On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1$ et $u_0 = 0,5$.
Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est 1.
Montrer ensuite que la suite (u_n) est croissante et par récurrence qu'elle est majorée par 1.
Peut-elle converger vers 1?

◊ Contre-exemple:
On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = {u_n}^2 - u_n + 1$ et $u_0 = 1,1$.
Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est 1.
Montrer ensuite que la suite (u_n) est croissante.
Peut-elle converger vers 1?

Compléments

Le calcul de limites de suites est relativement similaire au calcul de limites de fonctions. Nous noterons d'ors et déjà que les problèmes éventuels seront rencontrés pour les suites définies par récurrence.

Cas des suites $u_n = f(n)$.

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n, $n \geq p$, par $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $[p; +\infty[$.
Alors la suite (u_n) se comporte quand n tend vers $+\infty$ comme la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
Ainsi, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ existe ($l \in \mathbb{R},\ +\infty,\ -\infty$), alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe et est égale à $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Cas des suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Méthode à retenir:
♁ Pour utiliser cette méthode, il faut savoir que la suite est convergente!! En général, en utilisant les théorèmes de convergence monotone ou des suites adjacentes.

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.
Supposons que cette suite converge: $\text{Lim}_{n \to +\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$.

(1). $\text{Lim}_{n \to +\infty} u_{n+1} = \text{Lim}_{n \to +\infty} u_n = L$

(2). En utilisant les opérations sur les limites, on montre que $\text{Lim}_{n \to +\infty} u_{n+1} = f\left(\text{Lim}_{n \to +\infty} u_n\right) = f(L)$.

(3). On a donc obtenu que si la suite (u_n) converge, alors sa limite L vérifie $L = f(L)$.

En conclusion, si on sait qu'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ converge, alors sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$.
On retrouve les résultats observés à l'aide de la représentation en "toile d'araignée".'
Le problème revient souvent à démontrer que la suite converge.

Ce paragraphe comporte des notions qui ne sont pas à connaître du point de vue stricte du programme. Ces notions peuvent par contre être retenues comme des points de culture, qui permettront de mieux aborder les sujets développés en classe.

Suites monotones et bornées

Théorème: Toute suite monotone et bornée est convergente.
Id est:
- Toute suite croissante et majorée est convergente;
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque:
Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite!!! En général, la borne utilisée n'est pas la limite!!!
Il montre juste que cette limite existe et donc que cela vaut la peine de chercher à la déterminer.
Ensuite sachant qu'elle existe, on peut lui donner un nom, et l'utiliser tel quel dans des calculs, ou encore lui trouver des propriétés.

Remarque:
Ce théorème comme le suivant est d'une importance fondamentale pour toute l'analyse fonctionnelle. Il permet de démontrer par exemple que pour tout réel x, $\exp(x) = e^x = \text{Lim}_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et en particulier $e = \text{Lim}_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Suites adjacentes

Définition: Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si:

- l'une des deux est croissante,
- l'autre est décroissante,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème: Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

Propriété: Si deux suites sont adjacentes, alors pour tout entier naturel n, on a la relation:
$u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0$, en supposant que (u_n) est la suite croissante et (v_n) celle qui est décroissante.

Remarque:
Ce théorème comme le précédent, ne donne pas la valeur de la limite!!! Il montre juste que cette limite existe et donc que cela vaut la peine de chercher à la déterminer.
Ensuite sachant qu'elle existe, on peut lui donner un nom, et l'utiliser tel quel dans des calculs, ou encore lui trouver des propriétés.

Applications:
C'est ainsi par exemple que l'on peut justifier les propriétés de calcul intégral (calcul d'aire sous une courbe) en passant par la méthode des rectangles. C'est ce théorème aussi qui permet de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème du point fixe

Théorème: Soit (u_n) une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente et si la fonction f est continue, alors la limite l de la suite vérifie l'équation $l = f(l)$.

Ce théorème permet de déterminer la valeur de la limite d'une suite. Attention, il faut avoir montré avant d'utiliser le théorème que la suite converge!!
En général, cela demande l'utilisation du raisonnement par récurrence et des théorèmes précédents.

La construction "en escalier" ou "en toile d'araignée" des termes d'une suite définies par récurrence, illustre ce résultat, lorsque la suite converge, elle converge vers un réel vérifiant l'équation $f(x) = x$, c'est à dire l'abscisse d'un des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction f avec la droite d'équation $y = x$.