La fonction exponentielle

1 Existence et définition

On considère l'équation différentielle $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$: on cherche donc la ou les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ égales en tout point de $\mathbb{R}$ à leurs dérivées.

1.1 Existence

Théorème d'existence: admis

Il existe une fonction solution de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$.

Preuve: On montre que pour tout réel x, la suite $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 0}$ est convergente et on note $\exp(x)$ sa limite.
Alors la fonction $\exp : x \longmapsto \exp(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout réel x ainsi que $\exp(0) = 1$.
On se référera au document "méthode d'Euler", dans lequel une démonstration de ce résultat est proposé.

Théorème d'unicité

Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$. Alors φ est **unique**.

Préliminaires:
On rappelle un théorème fondamental en analyse concernant les fonctions dont la dérivée est nulle sur un intervalle:

Théorème: rappel, admis.

Soit une fonction dérivable sur un intervalle I de de $\mathbb{R}$. Si sa dérivée est **nulle** sur I alors la fonction est **constante** sur I.

Nous démontrons tout d'abord un lemme intermédiaire.

Lemme:

Soit φ une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$. Alors $\varphi(x) \neq 0$ pour tout réel x.
En fait, on peut affirmer que φ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ et donc que $\varphi(x) > 0$ pour tout réel x.

Preuve du lemme:

Remarque: on a obtenu par la même occasion que pour tout réel x, $\varphi(x)\,\varphi(-x) = 1$ d'où $\varphi(-x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$.

Preuve du théorème:

Définition

L'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$ est appelée la fonction exponentielle.

Remarque: ce n'est pas la seule façon de définir la fonction exponentielle.

1.2 Conséquences immédiates

Propriété:

La fonction exponentielle est dérivable et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Pour tout réel x, $\exp(x)) > 0$.

Pour tout réel x, $\exp'(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\exp(0) = 1$

Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Preuve: ces propriétés découlent directement de la démonstration de l'unicité de la fonction exponentielle.

1.3 Le nombre d'Euler: e.

Définition

Le nombre d'Euler, est l'image de 1 par la fonction exponentielle. On le note e.
On a donc $e = \exp(1)$.
$e \approx 2,718\,281\,828\,459$

Le nombre e est irrationnel.

Propriété:

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Preuve: il existe plusieurs preuves de ce résultat. Ici c'est une conséquence de la construction de la fonction exponentielle.

2 Propriétés fonctionnelles

Propriété:

Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tous réels x et y, $\exp(x) = \exp(y) \Longleftrightarrow x = y$

Pour tous réels x et y, $\exp(x) < \exp(y) \Longleftrightarrow x < y$

Preuve: Les trois premières assertions ont déjà été explicitées. Les deux dernières découlent de la stricte monotonie de la fonction exponentielle.
Applications: On peut ainsi résoudre des inéquations et des équations.
Par exemple, $\exp(x) > 1$ revient à $\exp(x) > \exp(0)$ et donc il vient $x > 0$.

Propriété:

Pour tout réel x, $\exp(x) \geq x + 1$.
En particulier, pour tout réel x, $e^x > x$.

Preuve: on considère la fonction $\varphi : x \longmapsto \exp(x) - (x + 1)$.
Interprétation graphique: On remarque que la tangente à la courbe $C_{\exp}$ en $x = 0$ a pour équation $y = \exp'(0)\,(x - 0) + \exp(0) = x + 1$.
Donc on déduit de l'inégalité précédente que $C_{\exp}$ est toujours au-dessus de sa tangente en $x = 0$.

Propriété:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

Preuve: on sait que $\exp(x) \geq x + 1$ pour tout réel x et que $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$. Donc par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
Interprétation graphique: la droite d'équation $y = 0$ est **asymptote horizontale** à $C_{\exp}$ en $-\infty$.

On déduit donc que la fonction exponentielle est à valeurs dans $]\,0; +\infty[$.
Ainsi comme de plus elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout réel $y \in]\,0; +\infty[$, il existe un unique réel x tel que $\exp(x) = y$.
La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\,0; +\infty[$.

3 Courbe

Nous avons déjà plusieurs propriétés de la courbe $C_{\exp}$. Déterminons de plus la tangente en $x = 1$.

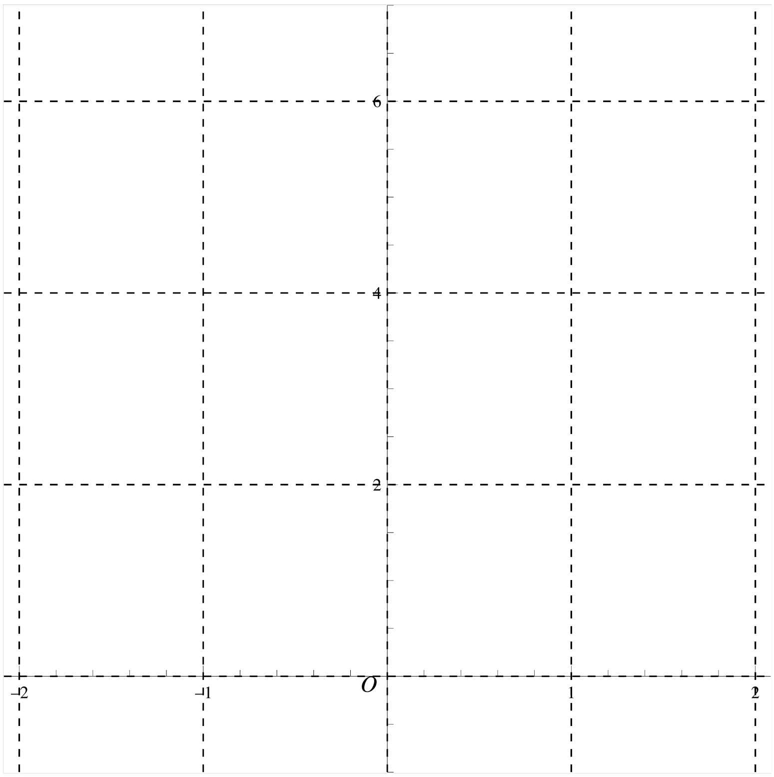
Propriété:

La tangente à la courbe $C_{\exp}$ en $x = 1$ passe par l'origine du repère.

Preuve: L'équation de la tangente à $C_{\exp}$ en $x = 1$ est donnée par $y = \exp'(1)\,(x - 1) + \exp(1) = e(x - 1) + e = e\,x$.

□

Donc cette tangente passe par l'origine du repère.
On obtient la courbe:



Remarquons aussi le tableau de variations:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp(x)$	$+$
$\exp$	$0 \nearrow +\infty$

4 Propriétés algébriques

En plus des propriétés déjà établies, la fonction exponentielle possède une propriété remarquable, qui la caractérise complètement.

Théorème:

Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
Autrement dit, l'image de la somme est le produit des images.

Preuve:

Remarque:

La fonction exponentielle est l'unique solution définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x)\,f(y)$.
En cherchant une fonction dérivable qui vérifie pour tous réels x et y, la relation $f(x + y) = f(x)\,f(y)$, on retrouve la fonction exponentielle.

Théorème:

Soit f une fonction non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réels x et y, $f(x+y) = f(x)\,f(y)$. Alors il existe une constante réelle k telle que $f(x) = \exp(k\,x)$ pour tout réel x.

Preuve: en appendice.

Corollaire:

(i) Pour tout réel x, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

(ii) Pour tous réels x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

(iii) Pour tout réel x et tout entier relatif n, $(\exp(x))^n = \exp(n\,x)$.

(iv) En particulier, pour tout entier relatif n, $\exp(n) = e^n$.

(v) $\exp\left(\dfrac{1}{2}\,x\right) = \sqrt{\exp(x)}$

Preuves:

Applications:

On peut ainsi transformer des expressions contenant des exponentielles et résoudre des équations et inéquations.

5 La notation e^x.

On remarque que la fonction exponentielle possède des propriétés analogues aux puissances: $a^{m+n} = a^m\,a^n$ et $(a^n)^m = a^{n\,m}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Par analogie, on définit:

Définition

On note $e^x = \exp(x)$ pour tout réel x.

Ainsi on utilisera de préférence, la notation dite notation exponentielle, plus pratique pour les manipulations.
Les propriétés s'écrivent alors:

Propriété:

$\forall\, x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ $\qquad$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1$

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ (e^x)' = e^x$ (cette notation est abusive)

$e^{x+y} = e^x\,e^y$ $\qquad$ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad$ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

$(e^x)^n = e^{n\,x}$ pour tout entier relatif n $\qquad$ $e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$e^x = e^y \iff x = y$ $\qquad$ $e^x < e^y \iff x < y$

6 Composée

Théorème:

Pour toute fonction u définie et dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, la fonction $\exp\circ u : x \longmapsto \exp(u(x)) = e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur I et sa dérivée est donné par $(\exp\circ u)' = (e^u)' = u'\,e^u$.

Preuve:

Il suffit d'appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée.

7 Limites particulières.

La fonction exponentielle ainsi définie a un comportement à l'infini différent des fonctions connues, i.e. des fonctions polynômes. Il semble intéressant dès lors de comparer l'exponentielle aux fonctions polynômes quand $x \longrightarrow +\infty$.
remarquons de plus que ce sont des cas de formes indéterminées.

On obtient les théorèmes de comparaison:

Théorème:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

Théorème:

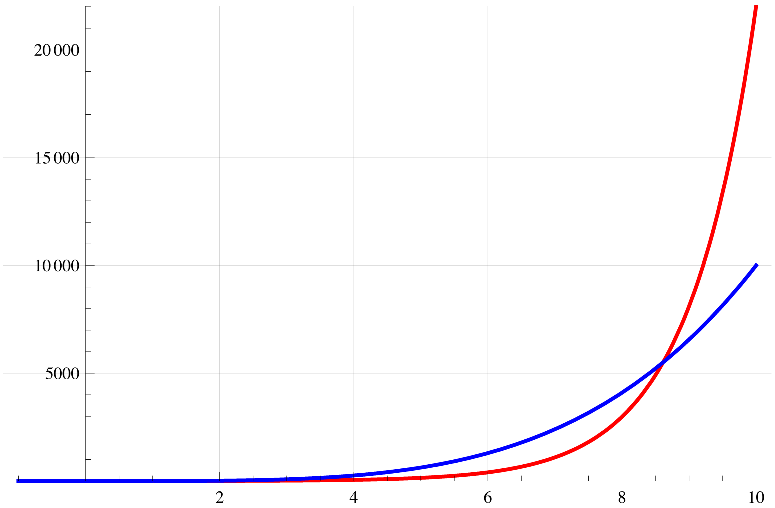
Soit n un entier naturel.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\exp(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

Preuves:

Ces théorèmes sont illustrés en disant que la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ "plus vite" que n'importe quelle puissance de x.

En effet, on interprète les résultats en $+\infty$ par le fait que quand $x \longrightarrow +\infty$, la distance entre la courbe de l'exponentielle et celle d'une fonction puissance devient aussi grande que l'on veut.



Un autre cas de forme indéterminée utile à noter est le suivant:

Théorème:

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Preuve: il suffit de reconnaître le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0. Par définition

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \exp'(0) = 1$$

APPENDIX A

À propos de l'équation fonctionnelle.

Théorème:

Soit f une fonction non nulle, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réels x et y, $f(x+y) = f(x)\,f(y)$. Alors il existe un réel k tel que $f(x) = \exp(k\,x) = e^{k\,x}$ pour tout réel x.

Preuve:

Démontrons a priori quelques propriétés d'une fonction qui serait solution de cette équation fonctionnelle.

Remarquons dans un premier temps que l'on peut supposer $f(x) \neq 0$ pour tout réel x.

En effet s'il existe un réel a, tel que $f(a) = 0$, alors $f(a+y) = f(a)\,f(y) = 0$ pour tout réel y. Ainsi pour tout réel x, comme $x = a + (x-a)$, on obtient $f(x) = 0$.

Donc s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$, f est la fonction constante égale à 0 sur $\mathbb{R}$. Évidemment la fonction nulle est solution, mais disons que dans ce cas elle ne nous intéresse pas.

Donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

- Pour tout réel x, $f(x) > 0$: en effet $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$ puisque $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$.
- $f(0) = 1$: en effet pour tout réel x, $f(x) = f(0+x) = f(0)\,f(x)$ d'où comme $f(x) \neq 0$, $f(0) = 1$.
- Pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$: en effet $f(0) = f(x + (-x)) = f(x)\,f(-x)$ et on sait que $f(x) \neq 0$.
- Pour tous réels x et y, $f(x-y) = \dfrac{f(x)}{f(y)}$.
- Pour tout entier naturel n, comme $n = \sum_{k=1}^{n} 1$, $f(n) = (f(1))^n$.
- Pour tout entier relatif n, $f(n) = (f(1))^n$.
- On montre alors que pour tous entiers p et q, non nuls, $f\left(\frac{1}{p}\right) = (f(1))^{\frac{1}{p}}$ puis que $f\left(\frac{p}{q}\right) = (f(1))^{\frac{p}{q}}$ puisque $1 = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{p}$ et $\frac{p}{q} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{q}$. Cela demande d'avoir au préalable défini $x^{\frac{1}{p}}$ et $x^{\frac{p}{q}}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel x, la fonction $\varphi_x : y \longmapsto \varphi_x(y) = f(x+y)$ est dérivable comme composée de la fonction $y \longmapsto x + y$ dérivable sur $\mathbb{R}$ suivie de la fonction f.

On obtient alors $\varphi_x{}'(y) = f'(x+y)$.

De plus comme pour tout réel y, $\varphi_x(y) = f(x)\,f(y)$ alors $\varphi_x{}'(y) = f(x)\,f'(y)$.

On a donc pour tout réel y, $f'(x+y) = f(x)\,f'(y)$ et en particulier pour $y = 0$, $f'(x) = f'(0)\,f(x)$: il existe donc un réel k tel que f est solution de l'équation différentielle $y' = k\,y$ et $y(0) = 1$.

Il est clair que la fonction $x \longmapsto e^{k\,x}$ est solution de $y' = k\,y$ et $y(0) = 1$.

Réciproquement soit φ une solution de $y' = k\,y$ et $y(0) = 1$.

Alors la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{\varphi(x)}{e^{k\,x}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)\,e^{k\,x} - \varphi(x) \times k\,e^{k\,x}}{\left(e^{k\,x}\right)^2} = \frac{k\,\varphi(x)\,e^{k\,x} - k\,\varphi(x)\,e^{k\,x}}{\left(e^{k\,x}\right)^2} = 0$$ donc ψ est constante égale à $\psi(0) = 1$.

Par suite $\varphi(x) = e^{k\,x}$.

En conclusion l'équation différentielle $y' = k\,y$, $y(0) = 1$ admet une unique solution, la fonction $x \longmapsto e^{k\,x}$ et donc les fonctions dérivables non nulles telles que $f(x+y) = f(x)\,f(y)$ sont les fonctions $x \longmapsto e^{k\,x}$.