

La fonction Logarithme Népérien

Existence

Théorème: (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, strictement monotone sur I à valeurs dans J .
Alors il existe une fonction appelée fonction réciproque de la fonction f dérivable sur J à valeurs dans I , notée f^{-1} telle que pour tout réel $x \in I$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ et pour tout réel $x \in J$, $f \circ f^{-1}(x) = x$.

Remarque:

On peut remarquer que les fonctions f et f^{-1} sont continues respectivement sur I et J .

La fonction exponentielle vérifie les conditions d'application du théorème.

Définition:

On appelle logarithme népérien, la fonction définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $] - \infty; +\infty[$ définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
On note $\ln$ cette fonction.

Conséquences:

Le domaine de définition de la fonction logarithme népérien est $]0; +\infty[$.

La fonction $\ln$, réciproque de la fonction $\exp$ est définie sur l'ensemble des images par $\exp$ et à valeurs dans le domaine de $\exp$. On a donc: $\mathcal{D}_{\ln} = \text{Im}(\exp)$ et $\text{Im}(\ln) = \mathcal{D}_{\exp}$

Réciprocité:

Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$ ou encore $\ln(\exp(x)) = x$.

Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ ou encore $\exp(\ln(x)) = x$.

L'unique antécédent de e^x par $\exp$ est x d'où le résultat.

De même pour $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique antécédent du nombre x par $\exp$ donc l'image de $\ln(x)$ par $\exp$ est bien x .

Propriété (valeurs particulières):

• $\ln(1) = 0$

• $\ln(e) = 1$

Preuve:

En effet, comme $e^0 = 1$ alors l'unique antécédent de 1 par $\exp$ est 0 d'où $\ln(1) = 0$ et de même comme $e^1 = e$ alors l'unique antécédent de e par $\exp$ est 1 d'où $\ln(e) = 1$.

Propriétés fonctionnelles

Théorème (dérivée de $\ln$):

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{++} =]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Preuve:

On admet la dérivabilité de $\ln$ comme fonction réciproque d'une fonction dérivable.

Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

La fonction $\varphi : x \mapsto e^{\ln(x)}$ est donc dérivable par composition.

On a $\varphi'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln(x)} = x \ln'(x)$.

D'autre part comme $\varphi(x) = x$ pour tout $x > 0$, alors $\varphi'(x) = 1$.

On obtient donc l'égalité $x \ln'(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

Comme $x > 0$, on peut donc en déduire $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel $x > 0$.

Propriété (variation de $\ln$):

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$.

Preuve:

Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ d'où le résultat.

Propriété (signe de $\ln(x)$):

- $\ln(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$
- $\ln(x) > 0$ pour $x > 1$ et $\ln(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

Preuve:

On sait que $\ln(1) = 0$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Par suite pour tout réel $x > 1$, $\ln(x) > \ln(1)$ d'où $\ln(x) > 0$ pour $x > 1$.

De même pour tout réel $0 < x < 1$, $\ln(x) < \ln(1)$ d'où $\ln(x) < 0$.

On en conclut que $\ln(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ainsi que le signe de $\ln$.

Propriété (équation et inéquation):

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$ et $a = b$.
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $0 < a < b$.

Preuve:

Les conditions $a > 0$ et $b > 0$ sont nécessaires pour l'existence de $\ln(a)$ et $\ln(b)$.

Ensuite, s'il existe $a \neq b$, $a < b$ par exemple tel que $\ln(a) = \ln(b)$ alors la fonction $\ln$ n'est pas strictement croissante. Absurde. Donc $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$.

Pour la 2^e assertion, il suffit d'appliquer la stricte monotonie pour le sens $0 < a < b \implies \ln(a) < \ln(b)$.

Pour le sens réciproque, on raisonne comme précédemment par l'absurde.

Propriétés Algébriques

Propriété fondamentale:

Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Preuve:

Soit y un réel strictement positif.

On définit la fonction ψ sur $]0; +\infty[$, par $\psi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$.

La fonction ψ est bien définie puisque $x > 0$ et $y > 0$ d'où $xy > 0$.

De plus la fonction $x \mapsto xy$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]0; +\infty[$ pour $x > 0$ puisque $y > 0$.

Alors par composition $x \mapsto \ln(xy)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Enfin par somme comme $\ln(y)$ est une constante, ψ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, on obtient $\psi'(x) = y \times \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$.

La fonction ψ est donc constante sur $]0; +\infty[$.

Or $\psi(1) = \ln(1 \times y) - \ln(1) - \ln(y) = \ln(y) - \ln(y) = 0$ donc $\psi(x) = 0$ pour tout réel $x > 0$.

On a donc obtenu $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = 0$ d'où $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour tout réel $x > 0$, pour tout réel $y > 0$.

Propriétés (Corollaire):

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ pour tout réel $x > 0$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ pour tous réels x et y strictement positifs.
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n .
En particulier $\ln(e^n) = n$ pour tout entier naturel n .
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$ pour tout réel $x > 0$.

Preuve:

- On a $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0$ et d'après la propriété précédente, $\ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

On en déduit donc $\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ d'où $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

- On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ en utilisant les 2 propriétés précédemment démontrées.

- Soit $x > 0$.

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

◇ Pour $n = 0$, on a $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(x) = 0$ d'où $\ln(x^0) = 0 \times \ln(x)$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$.

On fait l'hypothèse de récurrence $\ln(x^n) = n \ln(x)$ est vraie.

Or on a $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x)$ (propriété fondamentale).

D'après l'hypothèse de récurrence, $\ln(x^n) = n \ln(x)$ donc on obtient $\ln(x^{n+1}) = n \ln(x) + \ln(x) = (n + 1) \ln(x)$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

La propriété est donc héréditaire.

◇ La propriété est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire pour $n \geq 0$. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n .

On a donc en particulier pour $x = e$, $\ln(e^n) = n \ln(e) = n \times 1 = n$.

- On a $\ln(x) = \ln((\sqrt{x})^2) = 2 \ln(\sqrt{x})$ pour tout réel $x > 0$ d'où le résultat.

Limites

Définition (limite en $+\infty$):

Soit f une fonction définie sur $]x_0; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors on dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout réel A , il existe un réel a avec $a > x_0$ tel que si $x > a$, alors $f(x) > A$.

Théorème:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ (la courbe représentative de $\ln$ admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Preuve:

- Limite en $+\infty$.

Soit $A \in \mathbb{R}$.

On pose $a = e^A \in]0; +\infty[$.

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors $\ln(x) > \ln(a)$ d'où $\ln(x) > \ln(e^A)$ c'est à dire $\ln(x) > A$ pour tout réel $x > a$.

Par définition de la limite $+\infty$ en $+\infty$, comme pour tout réel A , il existe un réel $a > 0$ tel que si $x > a$ alors $\ln(x) > A$, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

- Limite en 0^+ :

On a pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ et $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Finalement comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Courbe

Tangente en $x = 1$:

L'équation de la tangente à $\ln$ en $x = 1$ est $y = x - 1$.

Preuve:

L'équation de la tangente à la courbe de $\ln$ en $x = 1$ est donnée par

$$y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1) = \frac{1}{1}(x - 1) + 0 = x - 1.$$

Propriété (position de $\mathbf{C}_{\ln}$ par rapport à sa tangente en $x = 1$):

- Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ et l'égalité n'a lieu que pour $x = 1$
- Conséquence: pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < x$.

Preuve:

On pose ψ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\psi(x) = (x - 1) - \ln(x)$.

La fonction ψ est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}$.

Comme $x > 0$, $\psi'(x)$ est du signe de $x - 1$ sur $]0; +\infty[$ d'où $\psi'(x) > 0$ pour $x > 1$ et $\psi'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

La fonction ψ est donc strictement décroissante sur $]0; 1]$ et ainsi $\psi(x) > \psi(1)$ pour $0 \leq x < 1$.

La fonction ψ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc $\psi(x) > \psi(1)$ pour $x > 1$.

Finalement $\psi(x) > \psi(1)$ pour tout réel $x > 0$ et $x \neq 1$.

Or $\psi(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$ donc $\psi(x) > 0$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$ et $\psi(1) = 0$.

On a donc $x - 1 - \ln(x) > 0$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$ d'où $x - 1 > \ln(x)$ pour $x > 0$ et $x \neq 1$ et $x - 1 \geq \ln(x)$ pour $x = 1$.

Pour le deuxième résultat, il suffit de remarquer que $x > x - 1$ pour tout réel x .

La courbe de $\ln$ est toujours en dessous de sa tangente en $x = 1$.

Tangente en $x = e$.

L'équation de la tangente à $\ln$ en $x = e$ est $y = \frac{1}{e}x$: cette tangente passe par l'origine du repère.

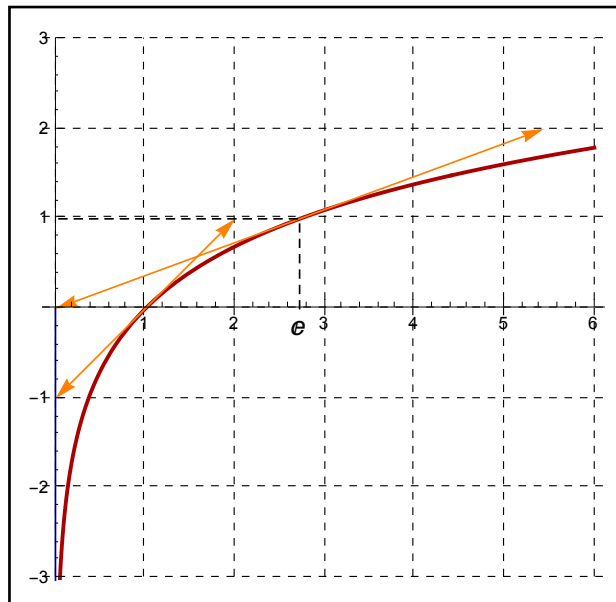
Preuve:

L'équation de la tangente à la courbe de $\ln$ en $x = 1$ est donnée par

$$y = \ln'(e)(x - e) + \ln(e) = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x.$$

Son ordonnée à l'origine est nulle donc cette tangente passe par l'origine du repère.

Représentation graphique:



Croissances comparées

Théorème:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0, n \in \mathbb{N}^*$

Preuve:

On pose $\varphi(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$ pour tout réel $x > 0$.

La fonction φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, on a $\varphi'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$.

Comme $x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 1$ sur $]0; +\infty[$.

Ainsi comme $\sqrt{}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on sait que $\sqrt{x} - 1 > 0$ pour $x > 1$ et $\sqrt{x} - 1 < 0$ pour $0 < x < 1$ d'où $\varphi'(x) > 0$ pour $x > 1$ et $\varphi'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

La fonction φ est donc strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

Par suite $\varphi(x) > \varphi(1)$ pour $x > 1$ et $\varphi(x) > \varphi(1)$ pour $0 < x < 1$.

Or $\varphi(1) = 2\sqrt{1} - \ln(1) = 2 > 0$.

Donc $\varphi(x) > 0$ pour tout réel $x > 0$.

On en déduit donc que $\ln(x) < 2\sqrt{x}$ pour tout réel $x > 0$.

Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

On a montré que pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < 2\sqrt{x}$ donc pour tout réel $x > 0$, $\frac{\ln(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est à dire

$$\frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Remarquons de plus que pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et $x > 0$ donc on a $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on obtient donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$.

Pour tout réel $x > 0$, $x \ln(x) = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.

Il y a plusieurs méthodes.

Pour tout entier naturel $n > 0$, $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{n \ln(x)}{x^n} = \frac{1}{n} \frac{\ln(x^n)}{x^n}$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^n} = 0$.

On peut aussi remarquer pour $n > 0$, $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln(x)}{x}$ et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$ alors par produit, on obtient le résultat annoncé.

Pour la deuxième limite, on peut raisonner de même:

- $x^n \ln(x) = \frac{1}{n} x^n \ln(x^n)$ ou

- $x^n \ln(x) = x^{n-1} \times x \ln(x)$ ou

par composition,

$$\bullet x^n \ln(x) = \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n}.$$

Compléments

1. dérivée de $\ln(u)$: dérivée logarithmique.

Propriété:

Soit u une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que de plus $u(x) > 0$ pour tout réel $x \in I$.

Alors la fonction $\ln \circ u = \ln(u)$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

On retient $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Preuve:

Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées à $\ln \circ u$.

Comme u est à valeurs dans $]0; +\infty[= D_{\ln}$, $\ln \circ u$ est définie et dérivable sur I et on a $(\ln \circ u)' = u' \times \ln'(u) = \frac{u'}{u}$.

2. Un autre cas de forme indéterminée.

Théorème: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Preuve:

La fonction $\ln$ est dérivable en $x = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1)$ c'est à dire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Remarque:

C'est une méthode classique pour lever des indéterminations en un point fini.

On a de la même manière $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

3. Quelques points à retenir.

3.1. Le domaine de définition de $\ln(u)$:

Exemple: Déterminons le domaine de définition de $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ et celui de $\ln(x-1) - \ln(x+1)$.

Le nombre $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ est défini si $\frac{x-1}{x+1} > 0$ donc si $x < -1$ et $x > 1$.

Le nombre $\ln(x-1)$ est défini pour $x > 1$ et le nombre $\ln(x+1)$ pour $x > -1$ donc le nombre $\ln(x-1) - \ln(x+1)$ est défini pour $x > 1$.

Théoriquement pourtant $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$ partout où chacun des nombres est bien défini en fait.

Il faut donc prendre des précautions quand on transforme des expressions avec des logarithmes. On peut ou ajouter ou enlever une partie des domaines de définition.

3.2. Les équations avec des logarithmes:

Pour les raisons précédemment évoquées de domaines de définition, il faut avant de résoudre une équation avec des logarithmes se poser la question des domaines de définition.

Exemple: Résolvons l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x)$.

On est tenté d'écrire directement, alors il faut $x^2 - 1 = x$ d'où $x^2 + x - 1 = 0$ et on détermine les solutions

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Donc l'équation admet 2 solutions!!

Et c'est FAUX!!

En effet la solution x_1 n'appartient pas au domaine de définition de l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x)$.

Dans ce cas, on voit facilement l'erreur, il peut arriver que l'impossibilité soit plus délicate à détecter.

La bonne méthode est de commencer par étudier le domaine de définition de l'équation de départ. Ici en l'occurrence, c'est $]0; +\infty[$.

donc l'équation $\ln(x^2 - 1) = \ln(x)$ équivaut à l'équation $\begin{cases} x^2 - 1 = x \\ \text{et } x > 0 \end{cases}$.

4. Primitives

Définition:

On appelle **primitive sur I** d'une fonction f définie sur I , toute fonction F dérivable sur I et telle que $F' = f$ sur I .

Exemples:

- $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto e^x$ est une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$
- $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Théorème (admis):

Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I .

Ce théorème sera démontré dans la cadre du chapitre sur l'intégration.

Propriété:

Soit F et G deux primitives d'une même fonction f sur I . Alors F et G diffèrent d'une constante, autrement dit il existe un réel K tel que $G(x) = F(x) + K$ pour tout réel $x \in I$.

Preuve:

On a clairement $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc $G - F$ est constante sur I .

Il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) - F(x) = K$ d'où $G(x) = F(x) + K$ pour tout $x \in I$.

Propriété:

Soit f une fonction définie sur I , admettant une primitive sur I .

Alors f admet une infinité de primitives sur I .

Pour tout couple $(x_0; y_0)$ avec $x_0 \in I$, il existe une unique primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 . On appelle un tel couple $(x_0; y_0)$ une condition initiale.

Preuve:

• S'il en existe une F , alors toutes les fonctions $G = F + K$ pour $K \in \mathbb{R}$ sont aussi des primitives de f d'où l'infinité.

• Soit F une primitive de f .

Alors la fonction G définie par $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ est une primitive de f (évident) telle que de plus $G(x_0) = y_0$.

Montrons qu'elle est unique.

Soit H une autre primitive de f telle que $H(x_0) = y_0$.

Alors comme on sait qu'il existe une constante K telle que $H(x) = G(x) + K$ alors $H(x_0) = G(x_0) + K$ d'où $y_0 = y_0 + K$ et donc $K = 0$.

Par suite $H = G$: G est unique.

Théorème:

La fonction logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Remarque:

Cette propriété de $\ln$ la caractérise complètement. C'est à dire que l'on peut définir la fonction $\ln$ comme l'unique primitive de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ et retrouver toutes ces propriétés, en particulier qu'elle est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.