La fonction Logarithme Népérien

Existence

Théorème: (admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, strictement monotone sur I à valeurs dans J.
Alors il existe une fonction appelée fonction réciproque de la fonction f dérivable sur J à valeurs dans I, notée f^{-1} telle que pour tout réel $x \in I$, $f^{-1} \circ f(x) = x$ et pour tout réel $x \in J$, $f \circ f^{-1}(x) = x$.

Remarque:
On peut remarquer que les fonctions f et f^{-1} sont continues respectivement sur I et J.

La fonction exponentielle vérifie les conditions d'application du théorème.

Définition:
On appelle logarithme népérien, la fonction définie sur $]0; +\infty[$ à valeurs dans $]-\infty; +\infty[$ définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
On note ln cette fonction.

Conséquences:

Le domaine de définition de la fonction logarithme népérien est …………………

Réciprocité:

Pour tout réel x, ……………………

Pour tout réel $x > 0$, ……………………

Propriété (valeurs particulières):
-
-

Preuve:

Propriétés fonctionnelles

Théorème (dérivée de ln):

Preuve:

En utilisant la relation $e^{\ln(x)} = x$, démontrer que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel $x \in]0; +\infty[$.

Propriété (variation de ln):

Preuve:

Propriété (signe de ln(x)):

-
-

Preuve:

Propriété (équation et inéquation):

-
-

Preuve:

Propriétés Algébriques

Propriété fondamentale:
Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Preuve:

Soit y un réel strictement positif.
On définit la fonction ψ sur $]\,0;+\infty[$, par $\psi(x) = \ln(x\,y) - \ln(x) - \ln(y)$.

Justifier que ψ est dérivable sur $]\,0;+\infty[$.
Montrer que $\psi'(x) = 0$ pour $x \in]\,0;+\infty[$ puis en déduire que $\psi(x) = 0$ pour $x \in]\,0;+\infty[$.

Conclure.

Propriétés (Corollaire):

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ pour tout réel $x > 0$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ pour tous réels x et y strictement positifs.
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$ pour tout réel $x > 0$ et tout entier naturel n .
  En particulier $\ln(e^n) = n$ pour tout entier naturel n .
- $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$ pour tout réel $x > 0$.

Preuve:

En utilisant la propriété fondamentale, justifier les propriétés ci-dessus.

Limites

Définition (limite en $+\infty$):
Soit f une fonction définie sur $]\, x_0 ; +\infty[$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.
Alors on dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout réel A, il existe un réel a avec $a > x_0$ tel que si $x > a$, alors $f(x) > \mathrm{A}$.

Théorème:

-
-

Preuve:

• Limite en $+\infty$.

• Limite en 0^+:

Courbe

Tangente en $x = 1$:
L'équation de la tangente à en $x = 1$ est $y = x - 1$.

Preuve:

Propriété (position de $\mathcal{C}_{\ln}$ par rapport à sa tangente en $x = 1$):
• Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \le x - 1$ et l'égalité n'a lieu que pour $x = 1$
• Conséquence: pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < x$.

Preuve:

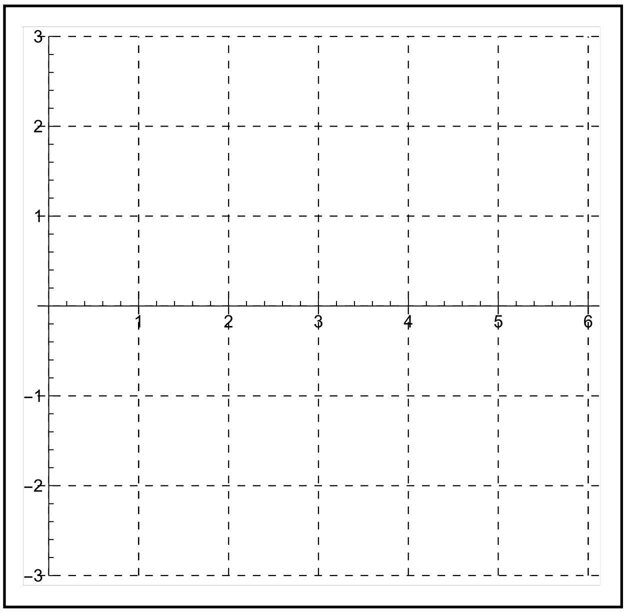
On pose ψ la fonction définie sur $]\,0; +\infty[$ par $\psi(x) = (x - 1) - \ln(x)$.

Tangente en $x = e$.

L'équation de la tangente à en $x = e$ est $y = \frac{1}{e}x$: cette tangente passe par l'origine du repère.

Preuve:

Représentation graphique:



Croissances comparées

Théorème:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0,\ n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$

Preuve:

On pose $\varphi(x) = 2\sqrt{x} - \ln(x)$ pour tout réel $x > 0$.
Montrer que φ est dérivable et déduire des variations de φ , le signe de $\varphi(x)$ sur $]\,0; +\infty[$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

Par composition, déduire du résultat précédent $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x)$.

Justifier les 2 autres limites.

Compléments

1. dérivée de ln(u): dérivée logarithmique.

Propriété:
Soit u une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que de plus $u(x) > 0$ pour tout réel $x \in I$.

Alors la fonction $\ln \circ u = \ln(u)$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $(\ln(u))'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On retient $\boldsymbol{(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}}$.

Preuve:
Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées à $\ln \circ u$.

2. Un autre cas de forme indéterminée.

Théorème: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Preuve:

Remarque:
C'est une méthode classique pour lever des indéterminations en un point fini.

On a de la même manière $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

3. Quelques points à retenir.

3.1. Le domaine de définition de ln(u) :

3.2. Les équations avec des logarithmes:

4. Primitives