Nombres Complexes, exercices.

Exercice 1

- Effectuer le produit $(z + 1 + i)(z + 1 - i)(z - 1 + i)(z - 1 - i)$.
- Soit $z = 1 + \sqrt{3} + 5(1 - \sqrt{3})i$. Calculer z^2 et z^3 .
- On considère le polynôme $P(z) = z^4 - 2z^3 - 2z - 1$. Les nombres i , $1 + i$, $\frac{1-i}{1+i}$ et $\frac{3-i}{1+3i}$ sont-ils des racines de P ?

Exercice 2: conjugué

1. Propriétés du conjugué:

Démontrer les résultats suivants pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :

- $\overline{\overline{z}} = z$ • $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ • $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout entier naturel n .
- $\overline{\frac{1}{z_1}} = \frac{1}{\overline{z_1}}$ avec $z_1 \neq 0$ et $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ avec $z_2 \neq 0$. • $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

2. Donner le conjugué des nombres suivants:

- a. $z_1 = (5 + 2i)(-4 + 3i)$ b. $z_2 = \frac{3-i}{2i}$ c. $z_3 = \frac{(3-i)(3-2iz)}{z^2 - \overline{z}}$ avec $z \neq 0$ et $z \neq 1$

3. Parmi les nombres suivants, lesquels sont des réels et lesquels sont des imaginaires purs:

- a. $z_4 = i(z - \overline{z})$ b. $z_5 = 2z + 5\overline{z} - (\overline{z} - 2z)$ c. $z_6 = i(z - 2i)(\overline{z} + 2i)$

4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que $z^2 - 2z + 7$ est un réel.

Exercice 3

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$.

- Pour $z \neq 1$, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = \frac{2iz}{z-1}$ en fonction de x et de y .
- Même question pour $Z = z^2 - 2z + 3$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

- a. $(2+i)z + 4 - i = 0$ b. $\frac{1}{2z-i} = -1 + 2i$ c. $\frac{z+i}{z-i} = 5$
- d. $(1+i)\overline{z} + 1 - i = 0$ e. $(iz+2)(\overline{z}-5i) = 0$ f. $\begin{cases} 3z_1 + z_2 = 1 - 7i \\ iz_1 + 2z_2 = 11i \end{cases}$

Exercice 5

On pose $z = x + iy$, x et y réels.

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $3\bar{z} - 2iz$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $3\bar{z} - 2iz = 5 - 3i$.

Exercice 6

1. $z^2 - 2(1 + \cos(\theta))z + 5 + 4\cos(\theta) = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

2. Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, en déduire $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ puis résoudre l'équation bicarrée $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

3.a. Résoudre l'équation $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.

b. Résoudre les équations $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$.

c. Soit $P(z)$ le polynôme de la variable complexe z tel que

$$P(z) = z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1.$$

Vérifier que pour tout $z \neq 0$, $\frac{P(z)}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1 + \sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$.

Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 7

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = 2 + \frac{1}{2}i$, $z_C = 1 - \frac{3}{2}i$ et $z_D = -1 - \frac{1}{2}i$.

1. Placer ces points sur un graphique puis déterminer l'affixe du milieu I du segment $[AC]$.

2. Déterminer les affixes des $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à B .

Exercice 8

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Re}(z^2) = 0$.

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\operatorname{Im}(z^2) = 2$.

3. En déduire les solutions de l'équation $z^2 = 2i$ dans $\mathbb{C}$ et représenter les solutions dans le plan complexe.

Exercice 9

1. Soit le complexe $z = x^2 + y^2 - 2x - 3 + i(2x - 1 + y)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a. Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z tel que z soit un réel.

b. Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tel que z soit un imaginaire pur.

2. Déterminer l'ensemble des complexes z distincts de $-2 - i$, tels que $Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}$ soit un réel strictement positif.

Interpréter graphiquement.