Nombres complexes: Une introduction.

Résolution d'équation du 3ième degré

Partie A: méthode de Tartaglia-Cardan (1545)

On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ x^3 - 6\,x - 20 = 0$.

1. On pose $x = u + v$. Réécrire l'équation avec les inconnues u et v. Quelle valeur affecter à $u\,v$ pour que l'équation (E) s'écrive $u^3 + v^3 - 20 = 0$?

2. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$.

Avec la condition sur $u\,v$, montrer que U et V sont solutions du système $\begin{cases} U + V = 20 \\ U\,V = 8 \end{cases}$ et donc d'une équation du second degré. Résoudre cette équation et en déduire U et V.

3. En déduire que $\sqrt[3]{10 + 2\sqrt{23}} + \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{23}}$ est une solution de l'équation (E). Vérifier graphiquement que c'est la seule.

Partie B: paradoxe de Bombelli.

La méthode précédente marche bien, mais … on veut résoudre l'équation $(E')\ :\ x^3 - 15\,x - 4 = 0$.

1. On pose à nouveau $x = u + v$. Déterminer la condition à imposer pour que l'équation devienne $u^3 + v^3 - 4 = 0$.

2. Avec la condition précédente, montrer que $U = u^3$ et $V = v^3$ doivent alors être solution de l'équation $(X - 2)^2 + 121 = 0$. Identifier le problème !

3. Vérifier que le nombre 4 est solution de l'équation (E'). Déterminer en factorisant $x^3 - 15\,x - 4$ par $x - 4$ les 2 autres solutions.

4. Dans le but de rendre la méthode de la partie A générale, on utilise une astuce: on définit le nombre impossible i par $i^2 = -1$ c'est à dire $i = \sqrt{-1}$.

a. Résoudre l'équation $(X - 2)^2 + 121 = 0$ en utilisant le nombre i.

b. Calculer, en utilisant les règles de calcul habituelles et $i^2 = -1$, les nombres $(2 - i)\,(2 + i)$, $(2 + i)^3$ et $(2 - i)^3$. Simplifier $(2 + i) + (2 - i)$. Conclure.

Rotation et multiplication

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{u};\ \vec{v}\right)$.

Partie A:

1. Soit A le point de coordonnées $(2;\ 1)$. Déterminer les coordonnées du point A' image du point A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2. Soit alors le point M de coordonnées $(x;\ y)$. Exprimer en fonction de x et y les coordonnées x' et y' du point M' image du point M dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie B:

On considère un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$. On décide d'associer au point de coordonnées $(x;\ y)$, l'écriture $x + i\,y$. Calculer le nombre $i(x + i\,y)$. Que remarque-t-on ?