

Travail autonome

Mathématiques, Série S

**L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Bonnes recherches.**

Exercice 1:

On considère l'application f qui à tout nombre complexe non nul, associe le nombre complexe $f(z) = \frac{2z - 4}{z}$.

1.
 - a. Calculer et exprimer sous forme algébrique $f(i)$ et $f(1 + i)$.
 - b. Déterminer les antécédents de 0 et de i .
2.
 - a. Montrer que l'équation $f(z) = z^2$ équivaut à $P(z) = 0$ avec $P(z) = z^3 - 2z + 4$.
 - b. Calculer $P(-2)$.
 - c. Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$.
 - d. En déduire les solutions de l'équation $f(z) = z^2$.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels.
 - a. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y .

On vérifiera que $\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{2(x^2 - 2x + y^2)}{x^2 + y^2}$.

- b. Déduire de la question précédente, l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel.
- c. Déduire de la question a., l'ensemble $(\mathcal{F})$ des points M du plan d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur.

Exercice 2:

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i .

À tout point M , distinct de A , d'affixe z est associé le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{(1 - i)(z - i)}{z - 1}$.

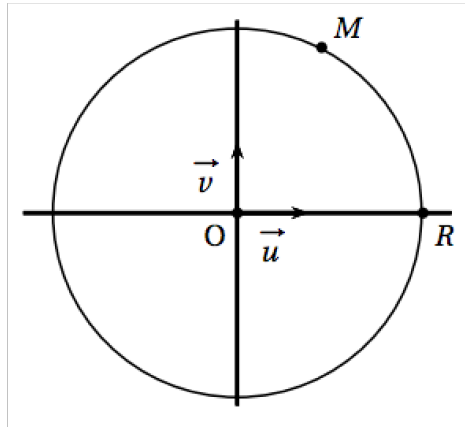
1. a. Calculer l'affixe du point C' associé au point C d'affixe $-i$.
- b. Placer les points A , B et C .
2. On pose $z = x + iy$ où x et y désignent deux nombres réels.
 - a. Montrer l'égalité $z' = \frac{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - i \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2}$.
 - b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que z' soit réel.
 - c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\operatorname{Re}(z')$ soit négatif ou nul.
3. a. Justifier que $|z'| = \sqrt{2} \frac{BM}{AM}$.
- b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $|z'| = \sqrt{2}$.

Exercice 3:

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[O; \vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z .
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right)$. Reproduire la figure sur la copie et construire le point M' .

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n , par la relation de récurrence : $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$.

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0 .

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
 - a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
 - b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Exercice 4:

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

On considère le point A d'affixe $a = i$ et le point B d'affixe $b = -i$.

Soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ dans lui-même qui au point M d'affixe z , distincte de $-i$, associe le point $M' = f(M)$

d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1 + iz}{z + i}$.

1.a. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

b. Placer les points A, B dans le repère.

On complétera cette figure au fur et à mesure de l'exercice.

2.a. Quelle est l'affixe du point C qui a pour image par l'application f le point C' d'affixe $1 + i$?

b. Placer les points C et C' dans le repère.

3. Montrer que l'équation $\frac{1 + iz}{z + i} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera. Interpréter géométriquement le résultat.

4.a. Vérifier que $z' = \frac{i(z - i)}{z + i}$.

b. En déduire que pour tout point M distinct de A et de B , on a :

$$OM' = \frac{AM}{BM}$$

5.a. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathcal{C})$ que l'on précisera.

b. Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère.

6.a. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels tels que $(x; y) \neq (0; -1)$ et $(x; y) \neq (1; 0)$.

Démontrer que la partie imaginaire de z' est égale à : $\text{Im}(z') = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y + 1)^2}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points M , distincts de A et de B , dont l'image par l'application f appartient à l'axe des abscisses.

Correction

Correction
