Nombres Complexes.

Introduction

Deux axes principaux ont motivé l'introduction des nombres complexes, enfin et surtout des nombres imaginaires:

• la résolution d'équation:

En travaillant à la résolution des équations du troisième degré, certains mathématiciens (Tartaglia et Cardan, XVI^e siècle) ont eu l'idée d'introduire, comme intermédiaire de calcul, un nombre imaginé, dont la propriété est que son carré vaut -1. En utilisant cette astuce de calcul, cela leur a permis de mettre au point des formules permettant de résoudre les équations du troisième degré.
L'idée vient alors petit à petit de voir si on ne pourrait pas généraliser l'utilisation de cette astuce, comment la généraliser, dans le but de déterminer des formules permettant de résoudre toutes les équations polynomiales.

• la volonté de munir les couples d'une multiplication:

L'objectif était de définir un produit sur les couples de nombres réels, donc munir $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ d'une multiplication.
Définir le produit par $(x;\, y)\times(a;\, b) = (x\,a;\, y\,b)$ n'amenait à aucune propriété ni interprétation satisfaisante.
Ainsi, dans la volonté de respecter les propriétés classiques (élément neutre, produit nul, distributivité,...), la définition satisfaisante est $(x;\, y)\times(a;\, b) = (x\,a - y\,b\,;\ x\,b + a\,y)$.
Ainsi:

◊ $(1;\, 0)\times(a;\, b) = (a;\, b)\times(1;\, 0) = (a;\, b)$

◊ $(x;\, y)\times(a;\, b) = 0$ si et seulement si $(x;\, y) = (0;\, 0)$ ou $(a;\, b) = 0$

En effet on obtient le système $\begin{cases} x\,a - y\,b = 0 \\ x\,b + y\,a = 0 \end{cases}$.

Si $(x;\, y) = (0;\, 0)$, on a le produit nul. Sinon, il vient $b = \dfrac{x}{y}\,a$ avec $y \neq 0$ ou $a = \dfrac{y}{x}\,b$ avec $x \neq 0$ (au moins un des deux est non nul puisque $(x;\, y) \neq (0;\, 0)$ et il vient donc $x \times \dfrac{x}{y}\,a + y\,a = 0$ d'où $a\left(\dfrac{x^2+y^2}{y}\right) = 0$ d'où $a = 0$ puis $b = 0$.

(On peut vérifier plus "rigoureusement" les cas)

◊ ...

Il vient alors $(0;\, 1)\times(0;\, 1) = (-1;\, 0)$ et ainsi le carré d'un couple est égal à "-1".

De fil en aiguille, une théorie a été construite pour être pleinement acceptée et de plus en plus utilisée à partir de 1800.

De gauche à droite:
Cardan, Tartaglia, Abel, Cauchy et Gauss (*source: wikipedia)*

Existence

Théorème-Définition (admis)

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, tel que:
- ⋆ $\mathbb{R}$ est identifié à un sous ensemble de $\mathbb{C}$
- ⋆ $\mathbb{C}$ est muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ qui prolonge celles définies sur $\mathbb{R}$
- ⋆ $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i, tel que $i^2 = -1$
- ⋆ Tout nombre complexe z s'écrit de manière **unique** sous la forme $x + i\,y$, où x et y sont des nombres réels.

Le réel x s'appelle la **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et le réel y s'appelle la partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.
Cette écriture d'un nombre complexe z est appelé écriture **cartésienne** ou **algébrique** du nombre z.

Conséquences:

- tout nombre réel a est identifié au nombre complexe $a + i \times 0$, noté a
- les nombres de la forme $0 + i\,y$, notés $i\,y$, sont appelés les **imaginaires purs**.

Pour tout y réel, $(i\,y)^2 = -y^2$.

- **Critère d'égalité:**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales deux à deux.

On écrit: $z = z' \Longleftrightarrow x + i\,y = x' + i\,y' \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

Propriétés algébriques

Règles de calcul

1. Addition:

Soient $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ deux nombres complexes écrits sous forme algébrique, avec $x,\ y,\ x',\ y'$ des nombres réels.
La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ tel que $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.

Justification: Les nombres $(x + x')$ et $(y + y')$ sont des réels donc le nombre complexe $(x + x') + i(y + y')$ est écrit sous forme algébrique. Il est bien défini et est unique.
Pour z et z' réels, on retrouve l'addition dans $\mathbb{R}$. La définition donnée prolonge donc l'addition dans $\mathbb{R}$.

Exemples:
$(2 + 3\,i) + (5 - i) =$ ....
$-1 - i + 2 + \sqrt{2}\ i =$ ....

Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe avec $x,\ y$ des nombres réels.
Il existe un unique nombre complexe noté $-z$ appelé opposé du nombre z tel que $z + (-z) = 0$.
On a $-z = -x - i\,y$.

Justification:
Le nombre $-x - i\,y = (-x) + i\,(-y)$ est bien défini et est unique. De plus
$(x + i\,y) + (-x - i\,y) = (x - x) + i(y - y) = 0 + 0\,i = 0$.

Exemples:
L'opposé de $2 + 3\,i$ est ....
L'opposé de $\left(1 - \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$ est ....

2. Multiplication:

Produit:

Soient $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ deux nombres complexes écrits sous forme algébrique, avec $x,\ y,\ x',\ y'$ des nombres réels.
Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z\,z'$ ou $z\times z'$ tel que
$z\,z' = (x\,x' - y\,y') + i(x\,y' + y\,x')$.

Preuve:
$z\,z' = (x + i\,y)\,(x' + i\,y')$ or comme dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$, la multiplication est distributive par rapport à l'addition;

....

....

....

Comme $x\,x' - y\,y'$ et $x\,y' + x'\,y$ sont des ...., le nombre $z\,z'$ est donc écrit sous sa forme algébrique $X + i\,Y$. Cette forme est unique.

Exemples:
$(2 + 3\,i)\,(5 - i) =$ ....

$\left(1 + \sqrt{2} + i\right)\left(1 + \sqrt{2}\,i\right) =$ ....

Inverse:

Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe non nul avec x et y des nombres réels.
Il existe un unique nombre complexe noté $\dfrac{1}{z}$ appelé inverse du nombre z tel que $z\times\dfrac{1}{z} = 1$.
On a alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + i\,y} = \dfrac{x - i\,y}{x^2 + y^2}$.

Preuve:
Si $z \neq 0$, alors $(x;\,y) \neq (0;\,0)$ donc $x^2 + y^2 \neq 0$. Le nombre complexe $\dfrac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\,\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ est bien défini et écrit sous forme algébrique puisque $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ et $\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ sont des réels. Il est unique.
De plus $(x + i\,y)\left(\dfrac{x - i\,y}{x^2 + y^2}\right) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}(x + i\,y)\,(x - i\,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\left(x^2 - (i\,y)^2\right) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}\left(x^2 + y^2\right) = 1$ puisque $(i\,y)^2 = i^2\,y^2 = -y^2$.

Remarque:
On vient d'utiliser un produit remarquable: $(x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+$ pour tout nombre complexe $x + i\,y$. On retrouvera plus loin le nombre complexe $x - i\,y$ comme le nombre réel $x^2 + y^2$

Exemples:
$\dfrac{1}{2 + 3\,i} =$ ....

Pratiquement, on utilise la remarque précédente. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le nombre $x - i\,y$ et on simplifie directement le dénominateur sous la forme
$x^2 + y^2$.

$\dfrac{1}{-2 - i} =$ ....

Quotient: On peut alors définir le quotient d'un nombre complexe z par un nombre complexe non nul z' par
$\dfrac{z}{z'} = z\times\dfrac{1}{z'}$.

Exemples:
$\dfrac{2 + 3\,i}{1 - i} = (2 + 3\,i)\times\dfrac{1}{1 - i} =$ ....

$\dfrac{5-i}{5+i} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

3. Produit nul

Propriété:

Soient $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ deux nombres complexes écrits sous forme algébrique, avec $x,\ y,\ x',\ y'$ des nombres réels.
Alors on a $z\,z' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$ si et seulement si $x = y = 0$ ou $x' = y' = 0$.

Preuve :
Si $z = 0$ ou $z' = 0$, on a clairement $z\,z' = 0$.

Réciproquement, supposons $z\,z' = 0$ alors $(x\,x' - y\,y') + i(x\,y' + y\,x') = 0 + 0\,i$ d'où $\begin{cases} x\,x' - y\,y' = 0 \\ x\,y' + y\,x' = 0 \end{cases}$.

On raisonne par disjonction des cas.

• Si $x = 0$, alors il reste $\begin{cases} y\,y' = 0 \\ y\,x' = 0 \end{cases}$.

Ainsi

- soit $y = 0$ et alors $z = 0 + i\,0$ et donc $z = 0$
- soit $y \neq 0$ d'où $\begin{cases} y' = \dfrac{0}{y} = 0 \\ x' = \dfrac{0}{y} = 0 \end{cases}$ d'où $z' = x' + i\,y' = 0 + i\,0$ et donc $z' = 0$.

• Soit $x \neq 0$, alors il vient $\begin{cases} x' - \dfrac{y}{x}\,y' = 0 \\ y' + \dfrac{y}{x}\,x' = 0 \end{cases}$.

- soit $y = 0$, alors $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$ d'où $z' = x' + i\,y' = 0 + i\,0$ et donc $z' = 0$.
- soit $y \neq 0$, alors $\begin{cases} x' = \dfrac{y}{x}\,y' \\ y' + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 y' = 0 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = \dfrac{y}{x}\,y' \\ y'\left(1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right) = 0 \end{cases}$ et comme $\dfrac{y}{x} \neq 0$, alors $1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 > 0$ donc il vient

$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$ d'où $z' = x' + i\,y' = 0 + i\,0$ et donc $z' = 0$.

Dans tous les cas, ou $z = 0$ ou $z' = 0$. Cqfd.

Remarque : Les calculs dans les systèmes sont des calculs dans l'ensemble des nombres réels !

Applications: On résout dans $\mathbb{C}$ les équations comme dans $\mathbb{R}$. On se ramène à des équations produit nul.

Résolvons par exemple $z^2 = -3$ dans $\mathbb{C}$.

………

………

………

………

………

La résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ sera plus amplement développée au paragraphe équations.

4. Puissances

Soit z un nombre complexe.
On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la suite des puissances n-ième du nombre z par

$$\begin{cases} z^0 = 1 \\ z^{n+1} = z \times z^n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}.$$

Si de plus $z \neq 0$, on pose $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ et pour tout entier naturel n , $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Exemples:
$(2 + 3\,i)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1 - i)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque :
Les puissances de i :

$i^0 = \ldots\ldots$	$i^4 = \ldots\ldots$	$i^8 = \ldots\ldots$	$i^{4k} = \ldots\ldots$; $k \in \mathbb{Z}$
$i^1 = \ldots\ldots$	$i^5 = \ldots\ldots$	$i^9 = \ldots\ldots$	$i^{4k+1} = \ldots\ldots$; $k \in \mathbb{Z}$
$i^2 = \ldots\ldots$	$i^6 = \ldots\ldots$	$i^{10} = \ldots\ldots$	$i^{4k+2} = \ldots\ldots$; $k \in \mathbb{Z}$
$i^3 = \ldots\ldots$	$i^7 = \ldots\ldots$	$i^{11} = \ldots\ldots$	$i^{4k+3} = \ldots\ldots$; $k \in \mathbb{Z}$

Vocabulaire complexe :

1. Conjugué

Soit $z = x + i\,y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe. Le **conjugué** du nombre z est le nombre noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = x - i\,y$.

Ainsi $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

Exemple:
$\overline{(2 - 3\,i)} = \ldots\ldots$ $\quad \bar{i} = \ldots\ldots$ $\quad \overline{-1 - i} = \ldots\ldots\ldots$

$\overline{(x + 1 - i\,y + 3\,i)} = \overline{\ldots\ldots\ldots + i\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ avec x et y réels.

Application:
On remarque que pour tout nombre complexe $z = x + i\,y$, $z\,\bar{z} = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 + y^2$ comme cela a déjà été montré à la définition de l'inverse.
On utilise alors, en particulier, le conjugué pour le calcul de quotients.

$$\frac{-1 + 2\,i}{2 - 3\,i} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Module :

Soit $z = x + i\,y$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un nombre complexe.

Le **module** du nombre z est le nombre **réel positif** noté $|z|$ défini par $\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Exemples:
$|2 + 3\,i| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad |-1 - i| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad \left|\sqrt{3} - i\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriétés :

1. Conjugué

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{(-z)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $\overline{(z+z')} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\overline{z\,z'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $\overline{\dfrac{1}{z}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $z \neq 0$ • $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $z' \neq 0$
- $\overline{z^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ pour tout entier relatif n et $z \neq 0$ si $n < 0$.
- $z + \bar{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $z - \bar{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $z = \bar{z}$ si et seulement si z est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $z\,\bar{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve:

Exemples:

- $\overline{(2+3\,i)-(1-5\,i)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
- $\overline{(z-1)\,(z+1)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Module :

Soit z et z' deux nombres complexes et k un nombre réel.

- $|z| = 0$ si et seulement si $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $|z| \in \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $|-z| = \ldots\ldots\ldots\ldots$ • $|\bar{z}| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $|k\,z| = |k|\,|z| = \begin{cases} k\,|z| & \text{si } k \geq 0 \\ -k\,|z| & \text{si } k < 0 \end{cases}$ • $|z\,z'| = |z|\,|z'|$
- $|z|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $z \neq 0$ • $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $z' \neq 0$
- $|z^n| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ pour tout entier relatif n.

⚠ Le module n'est pas compatible avec l'addition: $|z+z'| \neq |z| + |z'|$.
On a néanmoins la propriété:
Inégalité triangulaire: $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.
L'égalité n'a lieu que si $z = 0$ ou $z' = 0$ ou s'il existe un réel k strictement positif tel que $z' = k\,z$.

Corollaires:

- $|a + i\,b| \leq |a| + |b|$ pour tous nombres complexes a et b.
- $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$
- $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Interprétation géométrique: cette inégalité traduit juste le fait que la distance la plus courte pour aller d'un point à un autre est la ligne droite.
(Voir le paragraphe suivant pour les interprétations géométriques des nombres complexes avec des vecteurs.)
En effet si A, M et B sont des points tels que $z_{\overrightarrow{AM}} = z$ et $z_{\overrightarrow{MB}} = z'$, alors $|z+z'| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$ et $|z| = ||\overrightarrow{AM}|| = AM$ et $|z'| = ||\overrightarrow{MB}|| = BM$ d'où $AB \leq AM + BM$.

Preuve:

Exemples:

- $\left|(1-3\,i)\left(\sqrt{2}+i\right)\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ • $\left|(1+i)^{10}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Plan de Cauchy: représentation des nombres complexes

A: Représentation

On appelle **plan complexe ou plan de Cauchy**, le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

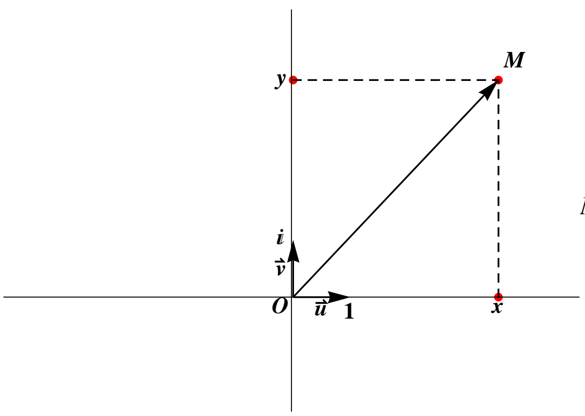
Ainsi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

Avec des points :

À tout point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, on **associe l'unique complexe** z dont la forme algébrique est $z = x + i\,y$.
On dit alors que z est l'**affixe** du point M.

Comme un point admet un unique couple de coordonnées et un complexe une unique forme algébrique, on peut donc affirmer qu'un point est uniquement déterminé par la donnée de son affixe, c'est à dire qu'à chaque point correspond une unique affixe et que réciproquement un nombre complexe donné est l'affixe d'un unique point .
On note souvent z_M ou encore m l'affixe d'un pont M du plan .

Ainsi deux points sont confondus si et seulement s'ils ont la même affixe.
On a $M = N$ si et seulement si $z_M = z_N$.



M point d'affixe z avec $z{=}x{+}iy$

Avec des vecteurs :

On appelle **affixe d'un vecteur** $\vec{U}$, l'affixe du point M du plan tel que $\vec{U} = \overrightarrow{OM}$.
On note souvent $z_{\vec{U}}$ cette affixe.

Ainsi des vecteurs égaux ont tous la même affixe, et réciproquement, deux vecteurs ayant la même affixe sont égaux.
On a donc $\vec{U} = \vec{V}$ si et seulement si $z_{\vec{U}} = z_{\vec{V}}$.

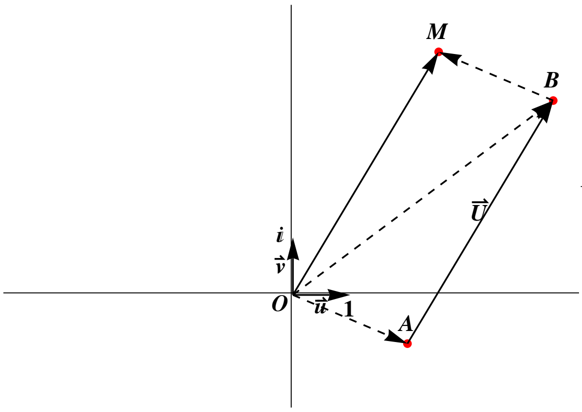
On obtient alors facilement :

- $\vec{V} = k\,\vec{U}$ si et seulement si $z_{\vec{V}} = k\,z_{\vec{U}}$ (Colinéarité)
- L'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs : $z_{\vec{U}+\vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$.

Commentaires :
On va pouvoir ainsi traduire les propriétés vectorielles des vecteurs en terme d'opérations sur les complexes.

Conséquences :

• Comme pour tous points A et B, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, on en déduit que $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{OB}} - z_{\overrightarrow{OA}} = z_B - z_A$.



$\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ d'affixe $z_{\vec{U}} = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

• L'affixe du milieu de deux points A et B est donné par $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

• Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $z_C - z_D = z_B - z_A$ ou encore $\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A} = 1$ avec $A \neq B$.

On peut ainsi réécrire "toutes" les propriétés de géométrie plane en terme de nombres complexes. Pratiquement, on traduit au fur et à mesure des besoins.

Exemples:
Soit les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 - i$, $b = 1 + 3\,i$ et $c = 5$.
• Déterminons l'affixe d du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

………

………

………

• l'affixe du centre I du parallélogramme $ABCD$ est ……………………………………………………

B: Interprétation géométrique

1. Du conjugué :

Les points M et M' d'affixes respectives z et $z' = \bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels $(O\,;\,\vec{u})$.

Preuve:
Pour tout point M d'affixe z, on a $z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z = i\,(2\,\mathrm{Im}(z))$.

Ainsi le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire au vecteur $\vec{v}$ du repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

La droite (MM') est donc perpendiculaire à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$.

De plus le milieu du segment $[MM']$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}(z)}{2} = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$: le milieu du segment $[MM']$ est un point de l'axe $(O\,;\,\vec{u})$.

L'axe $(O\,;\,\vec{u})$ est donc perpendiculaire au segment $[MM']$ en son milieu, c'est donc la médiatrice du segment $[MM']$.

Par suite les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $(O\,;\,\vec{u})$.

2. Du module :

Pour tout point M , $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = |z_M|$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{U}$, $\|\overrightarrow{U}\| = \left|z_{\overrightarrow{U}}\right|$.

Pour tous points A et B , $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \left|z_{\overrightarrow{AB}}\right| = |z_B - z_A|$.

Preuve:
Le point M d'affixe $z = x + i\,y$ est le point du plan de coordonnées $(x; y)$.

Ainsi on sait que $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z_M|$.

De même, comme $z_{\overrightarrow{U}} = z_M$ où M est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{U}$, et comme $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{U}\|$, on a donc $\|\overrightarrow{U}\| = \left|z_{\overrightarrow{U}}\right|$.

Enfin $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ et

$|z_B - z_A| = |(x_B + i\,y_B) - (x_A + i\,y_A)| = |(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exemple:

• Soit les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 - i$, $b = 1 + 3\,i$ et $c = 5$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

....

....

....

....

....

Applications:

Le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = r$.
On obtient une équation complexe d'un cercle.

Propriété:

Pour tous points A, B, C et D du plan d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D avec $A \neq B$, $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{CD}{AB}$.

Preuve:

On a simplement $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \dfrac{CD}{AB}$.

Équations & Complexes

A: Comme dans ℝ :

• Équations du 1er degré: Idem à ℝ. Toute équation qui peut se mettre sous la forme $a\,z + b = 0$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ donnés admet une unique solution dans ℂ, le nombre $-\dfrac{b}{a}$.

• Équations produit nul: idem à ℝ

• Équations quotient nul: idem à ℝ.

B: Équations polynomiales.

1. Équations du second degré à coefficients réels.

Toute équation de la forme $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ avec a, b et c **des réels** et $a \neq 0$ admet dans ℂ deux solutions éventuellement confondues.

Théorème:

....

....

....

....

Note: ....

....

....

2. Cas général:

Théorème (admis):
Tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet n racines complexes, certaines racines pouvant être confondues.

Conséquence: ....

....

....

Arguments, notation exponentielle

Différentes écritures d'un nombre complexe non nul:

3. Argument :

1. Argument :

2. la forme trigonométrique

3. la forme exponentielle

4. Propriétés de la forme exponentielle

3. De l'argument :

4. Représentation polaire :

5. De la multiplication par $e^{i\theta}$:

C: Interprétations géométriques: lieux de points.

1. Égalité de longueurs:

2. Colinéarité, parallélisme et alignement:

3. Orthogonalité:

4. Avec l'écriture algébrique:

Exemple:

À tout point M d'affixe z distincte de i , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{z+1}{z-i}$.

On pose $z = x + i\,y$ avec $(x; y) \neq (0; 1)$ et $z' = x' + i\,y'$.
Déterminons les expressions de x' et de y' en fonction de x et de y.

On a $z' = \dfrac{x + i\,y + 1}{x + i\,y - i} = \dfrac{(x+1) + i\,y}{x + i(y-1)} = \dfrac{((x+1) + i\,y)\,(x - i(y-1))}{(x + i(y-1))\,(x - i(y-1))} = \dfrac{(x(x+1) + y(y-1))}{x^2 + (y-1)^2} + i\,\dfrac{x\,y - (x+1)\,(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$ d'où

$x' = \dfrac{x^2 + x + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} = \dfrac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}{x^2 + (y-1)^2}$ et $y' = \dfrac{x\,y - x\,y + x - y + 1}{x^2 + (y-1)^2} = \dfrac{x - y + 1}{x^2 + (y-1)^2}$.

On s'intéresse alors souvent aux lieux de points suivants:

- Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit un point de l'axe des réels, c'est à dire tels que $z' \in \mathbb{R}$?
- Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit un point de l'axe des imaginaires, c'est à dire tels que $z' \in i\,\mathbb{R}$?

• On obtient donc $z' \in \mathbb{R}$ si et seulement si $y' = 0$ d'où $\dfrac{x - y + 1}{x^2 + (y-1)} = 0$.

Ainsi pour $(x\,;y) \neq (0\,;1)$, il faut $x - y + 1 = 0$ d'où $y = x + 1$.
On reconnaît l'équation d'une droite.
Ainsi $z' \in \mathbb{R}$ si et seulement si le point M appartient à la droite d'équation $y = x + 1$ privée du point de coordonnées $(0\,;1)$.

• Le nombre z' est un nombre imaginaire si et seulement si $x' = 0$ d'où $\dfrac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}{x^2 + (y-1)^2} = 0$.

Ainsi pour $(x\,;y) \neq (0\,;1)$, il faut $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$ c'est à dire $\left(x - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

On reconnaît l'équation d'un cercle, le cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Alors z' est un imaginaire si et seulement si le point M appartient au cercle de centre $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, privé du point $(0\,;1)$.

D: Transformations du plan et nombres complexes

0). Application du plan dans lui-même et fonction complexe:

1). Translations:

Un point M' est l'image d'un point M par la translation de vecteur $\vec{U}$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'} = \vec{U}$.

Par suite un point M' est l'image d'un point M par la translation de vecteur $\vec{U}$ si et seulement si $z_{M'} - z_M = z_{\vec{U}}$.

Ainsi $z_{M'} = z_M + z_{\vec{U}}$ que l'on écrit plutôt $z' = z + b$ avec $b = z_{\vec{U}}$.

Définition:

La fonction complexe $f : z \mapsto z' = z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$ donné est l'expression complexe de la translation de vecteur $\vec{U}$ d'affixe b .

2). Homothéties:

Un point M' est l'image d'un point M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.
Par suite un point M' est l'image d'un point M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k si et seulement si $z_{M'} - z_\Omega = k(z_M - z_\Omega)$ d'où $z_{M'} = k(z_M - z_\Omega) + z_\Omega$.
On écrit plutôt $z' = k(z - \omega) + \omega$ avec $\omega = z_\Omega$.

Soit f la fonction complexe définie par $f : z \mapsto z' = k\,z + b$ avec $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ donnés.
On associe à f la fonction du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
Remarquons que f admet un unique point fixe (ou invariant) c'est à dire un unique point Ω d'affixe ω tel que $f(\omega) = \omega$.
On résout $z = f(z)$.

On obtient $z = k\,z + b$ d'où $z(1 - k) = b$ et ainsi $z = \dfrac{b}{1-k}$ est l'unique solution de l'équation $z = f(z)$.

On pose alors $\omega = \dfrac{b}{1-k}$.

On a alors $z' = f(z) = k\,z + \dfrac{b(1-k)}{1-k} = k\,z - k \times \dfrac{b}{1-k} + \dfrac{b}{1-k} = k(z - \omega) + \omega$: le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par l'homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 1$.

Définition:
La fonction complexe $f : z \mapsto z' = k\,z + b$ avec $k \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$ donnés est l'expression complexe de l'homothétie de centre Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-k}$ et de rapport k.

3). Rotations:

4). En conclusion:

3. Racine n-ème de l'unité:

Définition: Soit n un entier naturel non nul.
On appelle racines n^e de l'unité, les n racines du polynôme $z^n - 1$ ou les n solutions de l'équation $z^n - 1 = 0$ ou $z^n = 1$.

Théorème:

Pour tout entier naturel n non nul, les racines n^e de l'unité sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$.

Partie A:

Partie B:

.