Épisode 8: Limites de fonctions (définitions)

PARAGRAPHE 1

Limites en l'infini

1.1 Limite infinie en l'infini

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (c'est à dire sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$).
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si pour tout voisinage ouvert W de $+\infty$, il existe un voisinage ouvert V de $+\infty$ tel que si $x \in V$, alors $f(x) \in W$.

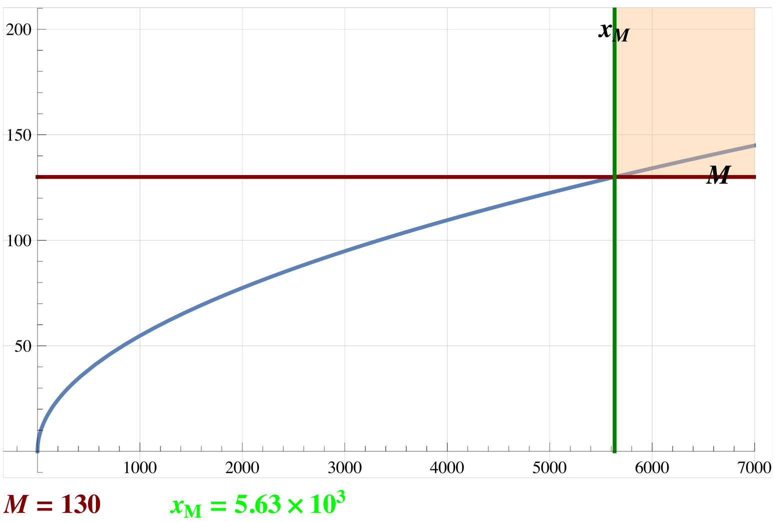
Cette définition très correcte est néanmoins pratiquement difficile à utiliser.
On retrouve le même principe que la définition d'une limite infinie de suite.

Définition 2:

Soit f une fonction définie sur $]a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite $+\infty$ en quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $x_M > a$ tel que pour tout réel $x > x_M$, $f(x) > M$.

La fonction f admet pour limite $+\infty$ en quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $x_M > a$ tel que pour tout réel $x \in]x_M; +\infty[$, $f(x) \in]M; +\infty[$.

Ces définitions équivalentes à la première sont en pratique plus faciles à mettre en place.
Illustration: $\forall M > 0,\ \exists x_M$ tel que $(x > x_M) \Rightarrow (f(x) > M)$



Exemple: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Soit M un réel.

Si $M \leq 0$, alors $x_M = 1$ convient car alors pour tout réel $x \geq 1$, $\sqrt{x} \geq 1 > M$ (on choisit 1 pour obtenir l'inégalité stricte).
Soit alors $M > 0$.

On pose $x_M = M^2$. On a $x_M > 0$.

Alors comme la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[0; +\infty[$, pour tout réel $x > x_M$, $\sqrt{x} > \sqrt{x_M}$ d'où $\sqrt{x} > \sqrt{M^2}$ et donc $\sqrt{x} > M$ car $M > 0$.
Partant pour tout réel M, il existe un réel $x_M > 0$ tel que pour tout réel $x > x_M$, $\sqrt{x} > M$. On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
Nous avons donné les définitions pour $+\infty$. Il faut aussi définir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. On obtient:

Définition 3:

$-\infty$ en $+\infty$:
Soit f une fonction définie sur $]a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite $-\infty$ en quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $x_M > a$ tel que pour tout réel $x \in]x_M; +\infty[$, $f(x) < M$.

$+\infty$ en $-\infty$:
Soit f une fonction définie sur $]-\infty; a[$, $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite $+\infty$ en quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $x_M < a$ tel que pour tout réel $x \in]-\infty, x_M[$, $f(x) > M$.

$-\infty$ en $-\infty$:
Soit f une fonction définie sur $]-\infty; a[$, $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite $-\infty$ en quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $x_M < a$ tel que pour tout réel $x \in]-\infty; x_M[$, $f(x) < M$.

Ces définitions se ressemblent. Elles suivent le même principe. Elles sont juste adaptées au cas en question.

□

1.2 Limite finie en l'infini

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$ (c'est à dire sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$).
On dit que la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout voisinage ouvert W de $+\infty$, il existe un voisinage ouvert V de ℓ tel que si $x \in V$, alors $f(x) \in W$.

Cette définition très correcte est néanmoins pratiquement difficile à utiliser.
On retrouve le même principe que la définition d'une limite infinie de suite.

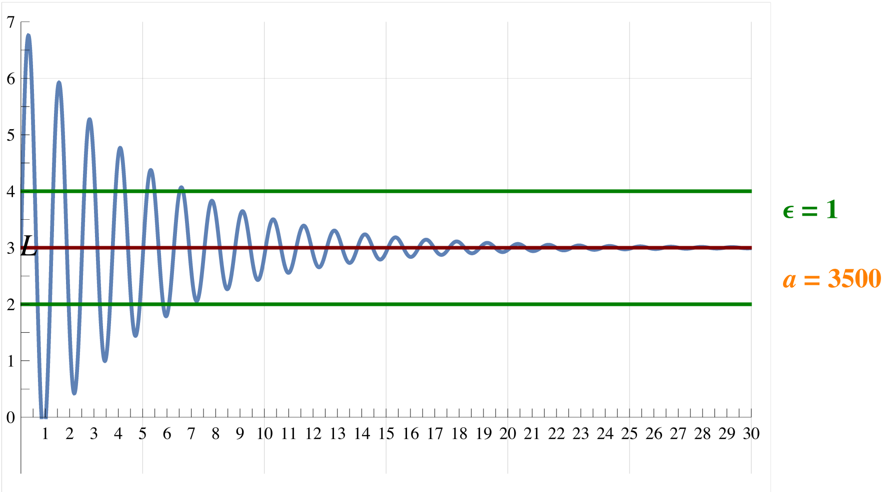
Définition 2:

Variante 1:
Soit f une fonction définie sur $]a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite ℓ en quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $x_\epsilon > a$ tel que pour tout réel $x > x_\epsilon$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$ ($-\epsilon < f(x) - \ell < \epsilon$ ou $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$).

Variante 2:
La fonction f admet pour limite $+\infty$ en quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout intervalle I centré en ℓ, il existe un réel $x_M > a$ tel que pour tout réel $x \in]x_M; +\infty[$, $f(x) \in I$.
(En général, on choisit des intervalles symétriques par rapport à ℓ de la forme $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$)

Ces définitions équivalentes à la première sont en pratique plus faciles à mettre en place.
Illustration: $\forall \epsilon > 0$, $\exists a_\epsilon$ (manuellement ici en sélectionnant le point noir) tel que $(x > a_\epsilon) \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Exemple 1: $\displaystyle \operatorname{Lim}_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$
Soit un réel $\epsilon > 0$.

On pose $x_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon} > 0$. Alors comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]\,0; +\infty[$, pour tout réel $x > x_\epsilon > 0$, on a $0 < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x_\epsilon}$
d'où $0 < \dfrac{1}{x} < \epsilon$ et ainsi $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$.

On peut donc conclure que $\displaystyle \operatorname{Lim}_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exemple 2: $\displaystyle \operatorname{Lim}_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{2x+1} = 1$
Nous avons donné la définition pour $+\infty$. Il faut aussi définir $\displaystyle \operatorname{Lim}_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

Définition 3:

Soit f une fonction définie sur $]-\infty; a[$, $a \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite ℓ en quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $x_\epsilon < a$ tel que pour tout réel $x \in]\,x_\epsilon; +\infty[$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

□

PARAGRAPHE **2**

Limites en un point fini

Les cas décrits ci-dessous ne trouvent plus leur correspondance avec les suites dans la mesure où un entier naturel n ne peut "que" tendre vers $+\infty$.

2.1 x tend vers a, x tend vers a^+, x tend vers a^-.

Considérant l'exemple de référence de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, il semble improbable de définir par exemple la limite quand $x \longrightarrow 0$ des nombres $\dfrac{1}{x}$.
En effet, on voit facilement que suivant de quel côté de 0, on se trouve les valeurs des images diffèrent considérablement.
On introduit donc les notions de tendre vers un réel a par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures à a.

On note ainsi $x \longrightarrow a^+$ ou $\begin{matrix} x \longrightarrow a \\ x > a \end{matrix}$ pour indiquer que l'on considère des réels x qui tendent vers a par valeurs supérieures à a, ou encore à droite de a. Les réels x considérés appartiennent donc à des intervalles de la forme $]a; a+\epsilon[$ ou $[a; a+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.
De même on note ainsi $x \longrightarrow a^-$ ou $\begin{matrix} x \longrightarrow a \\ x < a \end{matrix}$ pour indiquer que l'on considère des réels x qui tendent vers a par valeurs inférieures à a, ou encore à gauche de a. Les réels x considérés appartiennent donc à des intervalles de la forme $]a-\epsilon\,; a[$ ou $[a-\epsilon\,; a[$ avec $\epsilon > 0$.
La notation $x \longrightarrow a$ indiquent elle que les réels x appartiennent à des intervalles de la forme $]a-\epsilon\,;\ a+\epsilon\,[\setminus\{a\}$ ou $]a-\epsilon\,;\ a+\epsilon[$.

□

2.2 Limite infinie en un point fini

Ce cas ne se présente que si la fonction admet une valeur interdite.

Définition 1:

Soit a un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$.
Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.
Alors la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ (resp s $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$) si et seulement si pour tout voisinage ouvert W de $+\infty$, il existe un voisinage ouvert V à droite de a (resp à gauche de a) tel que si $x \in V$ alors $f(x) \in W$.

La fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

Comme pour les limites en l'infini, cette définition est souvent difficile à utiliser en pratique.

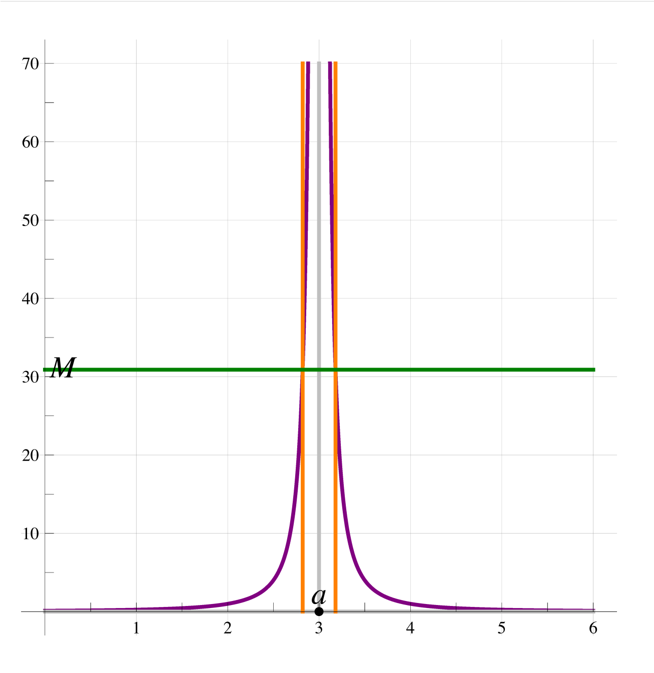
Définition 2:

Soit a un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$.
Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.

Variante 1:
Alors la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ (resp s $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$) si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $x \in]a; a+\eta_M[$ (resp $x \in]a-\eta_M; a[$) alors $f(x) \in]M; +\infty[$.

Variante 2:
Alors la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$ (resp s $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$) si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $a < x < a+\eta_M$ (resp $a-\eta_M < x < a$) alors $f(x) > M$.

On retrouve les mêmes principes que précédemment pour les limites en l'infini.
Remarquons que l'on choisit dans le cadre de ce cours, $M \in \mathbb{R}$ mais en fait ce sont les réels $M > 0$ qui nous intéressent dans ce cas.
Illustration: $\forall\, M > 0,\ \exists\, \eta_M > 0$ tel que $(a-\eta_M < x < a+\eta_M) \Rightarrow (f(x) > M)$ (M est manuel, η peut être automatique ou manuel)



$$\underset{x \to a}{\text{Lim}} \frac{1}{(x-a)^2} = +\infty$$

$M = 30.9$

$\eta_1 = 0.179895690740288$ $\eta_2 = 0.17989569074028$

Exemple 1: $\underset{x\to 0^+}{\text{Lim}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
Soit M un réel.

Si $M \leq 0$, comme $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout réel $x > 0$, alors $\eta_M = 1$ convient. En effet, pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, on a $\dfrac{1}{x} > 0$ d'où $\dfrac{1}{x} > M$.
Soit alors $M > 0$.

On pose $\eta_M = \dfrac{1}{M}$. Alors pour tout réel $0 < x < \eta_M$, $0 < x < \dfrac{1}{M}$ d'où $\dfrac{1}{x} > M$.

Exemple 2: $\underset{x\to 1^+}{\text{Lim}} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty$.
Nous avons donné la définition pour $+\infty$. Il faut aussi définir $\underset{x\to a^?}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$.

Définition 3:

Soit a un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$.
Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$.

Variante 1:
Alors la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\underset{x\to a^+}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$ ou $\underset{\substack{x\to a \\ x>a}}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$ (resp s $\underset{x\to a^-}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$ ou $\underset{\substack{x\to a \\ x<a}}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$) si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $x \in]a; a + \eta_M[$ (resp $x \in]a - \eta_M; a[$) alors $f(x) \in]-\infty; M[$.

Variante 2:
Alors la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\underset{x\to a^+}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$ ou $\underset{\substack{x\to a \\ x>a}}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$ (resp s $\underset{x\to a^-}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$ ou $\underset{\substack{x\to a \\ x<a}}{\text{Lim}} f(x) = -\infty$) si et seulement si pour tout réel M, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $a < x < a + \eta_M$ (resp $a - \eta_M < x < a$) alors $f(x) < M$.

Adaptée!!

Exemple 3: Démontrer à l'aide de la définition que $\underset{x\to 1^-}{\text{Lim}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$.

□

2.3 Limite finie en un point fini

Ce cas est un cas extrêmement courant et souvent un peu mis de côté. Il a pourtant tout son intérêt. Il correspond aux points de l'ensemble de définition, très souvent utiles dans les calculs de limites de produit, quotient ou composée et aussi aux notions de continuité et de dérivabilité.
La fonction f peut être ou ne pas être définie en a.

Définition 1:

Soit a un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$.
Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ ou sur I.
Alors la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ (resp s $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$) si et seulement si pour tout voisinage ouvert W de ℓ, il existe un voisinage ouvert V à droite de a (resp à gauche de a) tel que si $x \in V \bigcap I$ alors $f(x) \in W$.

La fonction f admet pour limite ℓ quand x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$.

Identiquement, en pratique, cette définition est un peu difficile à utiliser.
Remarquons la condition $x \in V \bigcap I$: x est donc un élément du voisinage de a et un élément du domaine de définition.

Ainsi la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{array}$ admet pour limite 0 en 0 mais la fonction $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ n'admet pas de limite en 0.

Définition 2:

Soit a un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ ou sur I.

Variante 1:
Alors la fonction f admet pour limite ℓ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ (resp s $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$) si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $x \in]a; a + \eta_M[\bigcap I$ (resp $x \in]a - \eta_M; a[\bigcap I$) alors $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$.

Variante 2:
Alors la fonction f admet pour limite ℓ quand x tend vers a, par valeurs supérieures à a (resp par valeurs inférieures à a), et on note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ (resp s $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$) si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $a \in I$ et $a < x < a + \eta_M$ (resp $a - \eta_M < x < a$) alors $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.

On retrouve les mêmes principes que précédemment pour les limites en l'infini.
Dans ce dernier cas, il est utile d'avoir une définition directe de la limite en a:

Définition 3:

Soit a un réel et I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ ou sur I.

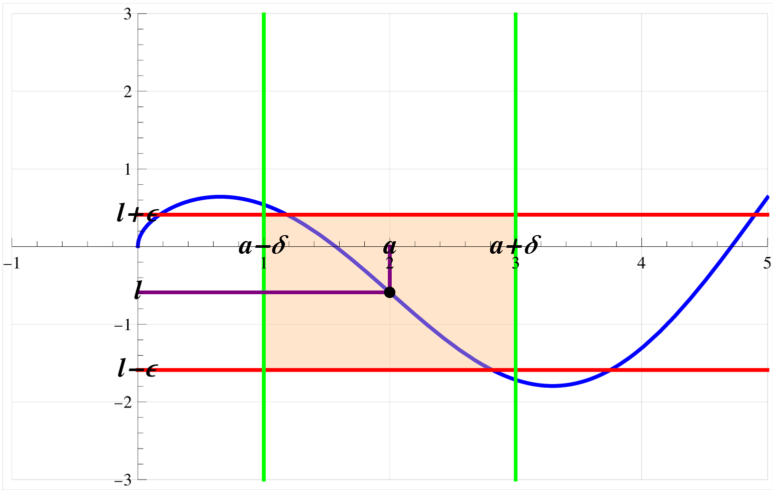
Alors la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, et on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout voisinage ouvert W de ℓ, il existe un voisinage ouvert V de a tel que si $x \in V \bigcap I$ alors $f(x) \in W$.

Identiquement, en pratique, cette définition est un peu difficile à utiliser.

Variante 1:
Alors la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, et on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $x \in]a - \eta_M; a + \eta_M[\bigcap I$ alors $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$.

Variante 2:
Alors la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a, et on note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta_M > 0$ tel que si $x \in I$ et $a - \eta_M < x < a + \eta_M$ alors $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.

Illustration: $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta_\epsilon > 0$ tel que $(a - \delta_\epsilon < x < a + \delta_\epsilon) \Rightarrow (l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$. ($\epsilon$ et δ sont manuellement choisis ici.)



Exemple 1: $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$.
Soit un réel $\epsilon > 0$.

On pose $\eta_\epsilon = \text{Min}\left(\dfrac{\epsilon}{2\,|a| + 1}, 1\right)$.
Remarquons que pour tout réel x, $\left|x^2 - a^2\right| = |x - a|\,|x + a| \leq |x - a|\,(|x| + |a|)$.
Or comme $x \in]\,a - \eta_\epsilon, a + \eta_\epsilon[$, $x \in]\,a - 1; a + 1[$ donc $|x| < |a| + 1$ d'où $|x| + |a| < 2\,|a| + 1$.

Par suite comme de plus $|x - a| < \eta_\epsilon$ d'où $|x - a| < \dfrac{\epsilon}{2\,|a| + 1}$, on obtient $\left|x^2 - a^2\right| < \dfrac{\epsilon}{2\,|a| + 1} \times (2\,|a| + 1)$ d'où $\left|x^2 - a^2\right| < \epsilon$.

Exemple 2: $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$

Exemple 3: $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$.

Exemple 4: $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + x - 11 = -5$

□

PARAGRAPHE 3

Interprétation graphique

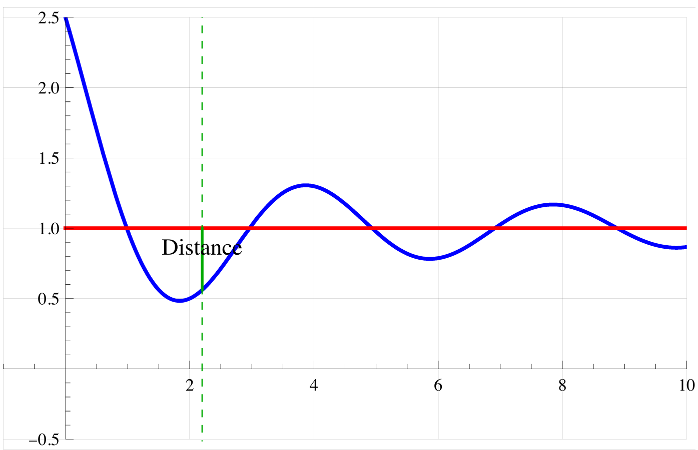
Il s'agit ici de définir un vocabulaire adapté permettant de traduire les résultats sur les limites d'un point de vue graphique.

3.1 Asymptotes horizontales: cas d'une limite finie en l'infini

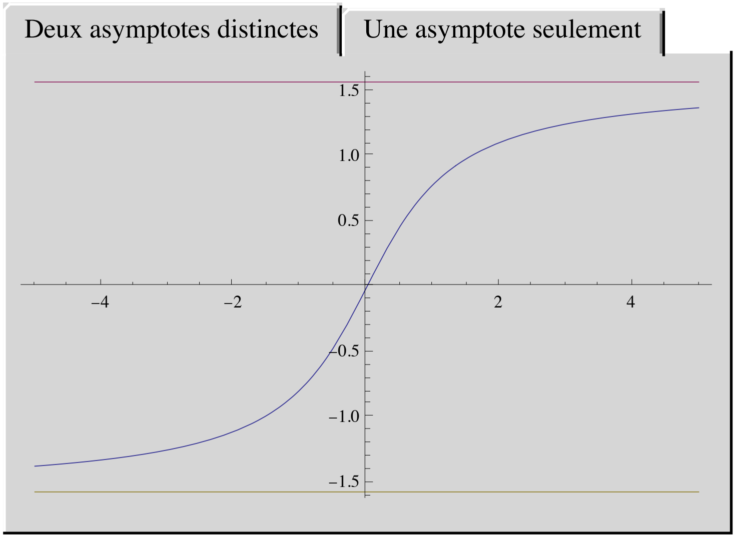
Définition

Soit f une fonction définie sur $]a;+\infty[$ (resp $]-\infty;a[$) et C_f sa courbe représentative.
La droite d'équation $y=\ell$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (resp $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$).

On traduit ainsi le fait que quand $x\longrightarrow+\infty$ (resp $x\longrightarrow-\infty$), la courbe C_f se "rapproche" de la droite d'équation $y=\ell$.
La distance $d(x)=|f(x)-\ell|$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
Illustration: ci-dessous une illustration dans le cas où $\ell=1$. La distance de la courbe à la droite diminue quand x tend vers $+\infty$.
La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à la courbe de f. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.



Remarquons qu'une courbe peut avoir deux asymptotes horizontales distinctes ou encore une asymptote horizontale en $+\infty$ mais pas en $-\infty$ ou inversement.



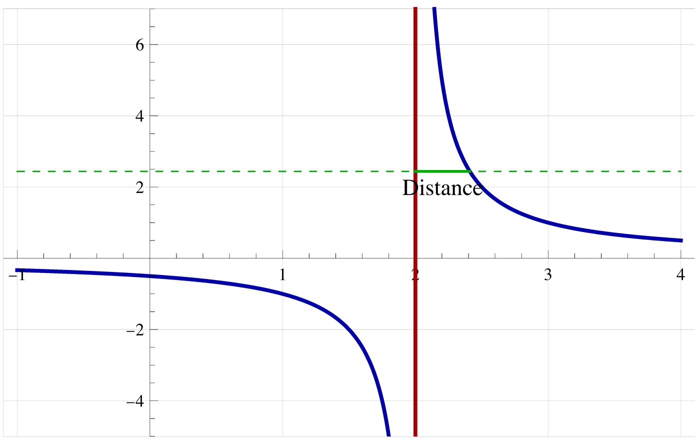
□

3.2 Asymptotes verticales: cas d'une limite infinie en un point fini

Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$ et C_f sa courbe représentative.
La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe C_f si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$).

On traduit ainsi le fait que quand x tend vers a, vers a par valeurs supérieures ou vers a par valeurs inférieures, la courbe C_f se rapproche de la droite verticale d'équation $x = a$. La distance d'un point de la courbe à la droite tend vers 0 quand x tend vers a.
Illustration: La distance de la courbe à la droite diminue quand x tend vers a.
Dans ce premier cas, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.



□

3.3 Autres types d'asymptotes

Ce paragraphe est hors programme, mais peut néanmoins apporter quelques éclaircissements quant à la compréhension des phénomènes étudiés. Il reste important du point de vue de la culture mathématique.

Définition: asymptote oblique

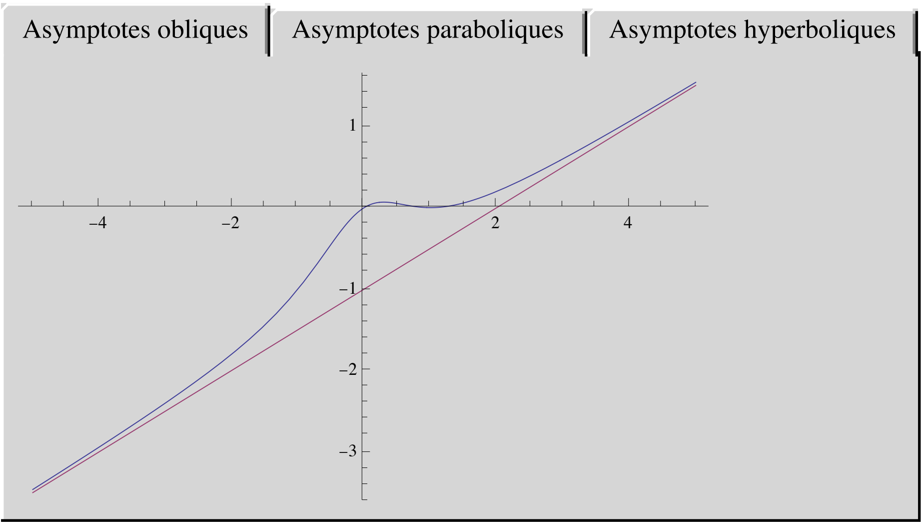
Soit f une fonction définie sur $]a; +\infty[$ (resp $]-\infty; a[$) et C_f sa courbe représentative.
La droite d'équation $y = a\,x + b,\ a \neq 0$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (a\,x + b)) = 0$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (a\,x + b)) = 0$).

Ce cas implique que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Définition: cas général

Soit f et g deux fonctions définies sur $]a; +\infty[$ (resp $]-\infty; a[$) et C_f et C_g leurs courbes représentatives.
La courbe C_g est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ (resp $-\infty$) si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ (resp $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$).

On caractérise ainsi différentes façons de se comporter en l'infini.
A priori, on ne parle d'asymptote que si les fonctions ont pour limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$.
Le type de fonctions qui définit l'asymptote donne le nom de l'asymptote: on parle ainsi d'asymptotes obliques (fonctions affines), d'asymptotes paraboliques (du type $x \longmapsto x^2$), hyperboliques (du type $x \longmapsto x^3$), ...
Illustration:



□

PARAGRAPHE **4**

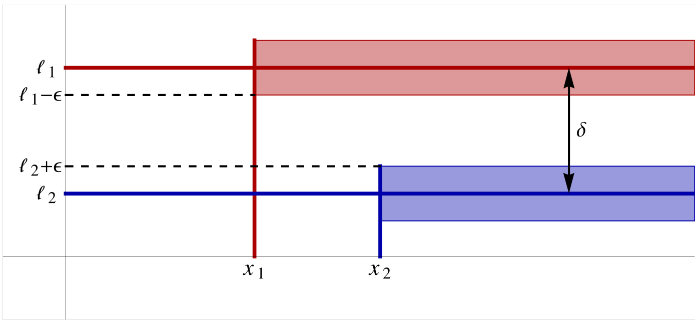
Quelques résultats théoriques

4.1 Autour des limites

Théorème: Unicité

Soit f une fonction admettant une limite finie ℓ quand x tend vers a ($a \in \mathbb{R}$, $a^+, a^-, +\infty$ ou $-\infty$). Alors cette limite est unique.

Illustration:
La définition assure que pour x assez grand ou assez proche de a, toutes les images appartiennent à l'intervalle $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$.



Comment se pourrait-il que toutes les images soient à la fois dans les deux tubes?
Preuve: quand $x \longrightarrow +\infty$.
On raisonne par l'absurde, et on suppose donc qu'il existe deux réels ℓ_1 et ℓ_2 tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_2$ et $\ell_1 \neq \ell_2$.
Par exemple, supposons que $\ell_1 > \ell_2$ et on définit $\delta = \ell_1 - \ell_2 > 0$.
Alors pour $\epsilon = \dfrac{\delta}{2} > 0$, il existe un réel x_1 tel que pour tout réel $x > x_1$, $\ell_1 - \epsilon < f(x) < \ell_1 + \epsilon$ et un rél x_2 tel que pour tout réel $x > x_2$, $\ell_2 - \epsilon < f(x) < \ell_2 + \epsilon$.
Remarquons alors que $\ell_1 - \epsilon = \ell_1 - \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ et que $\ell_2 + \epsilon = \ell_2 + \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{2} = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2}$.
Par suite pour tout réel $x > \text{Max}(x_1, x_2)$, $f(x) < \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2} < f(x)$: absurde.

Théorème: Signe

Soit f une fonction admettant une limite **finie non nulle** ℓ quand x tend vers a ($a \in \mathbb{R}$, $a^+, a^-, +\infty$ ou $-\infty$). Alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout réel $x \in V$, $f(x) \neq 0$ et $f(x)$ est du signe de ℓ.

Corollaire:

Soit f une fonction admettant une limite finie non nulle ℓ quand x tend vers a ($a \in \mathbb{R}$, $a^+, a^-, +\infty$ ou $-\infty$). Alors il existe un voisinage V de a sur lequel f est bornée.

Preuve: pour $a = +\infty$.

Théorème: Signe

Soit f une fonction admet pour limite $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsque $x \longrightarrow a$, alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout réel $x \in V$, $f(x) > 0$ (resp $f(x) < 0$).

Preuve: Il suffit de choisir $M = 1$ (resp $M = -1$) et appliquer la définition.

Théorème: Limite et image

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. Alors si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe finie, on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Attention, a priori ce théorème est à distinguer de la continuité. Néanmoins, on montre ainsi que si une fonction définie sur I admet une limite en $a \in I$, alors elle continue en a.
Preuve:

Théorème: Non majorée

Toute fonction croissante **et** non majorée sur $]a; +\infty[$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On peut évidemment adapté ce théorème: toute fonction **décroissante** sur $]a; +\infty[$ et **non minorée** admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

Preuve:

Remarque: la condition « croissante » est fondamentale. Par exemple, la fonction $x \mapsto x\cos(x)$ est non majorée, mais n'admet pas de limite.

Propriété: Pas de limite

Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Preuve:

Propriété:

La fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand $x \longrightarrow 0$.

Preuve:

□

4.2 Autour de la continuité et de la dérivabilité

Théorème:

Toute fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue sur I.

La notion de dérivabilité est une notion plus fine que la continuité. Plus exigeante.
Attention, la réciproque est fausse. On sait construire des fonctions continue en tout point et dérivable nulle part.
Sinon un contre-exemple trivial est la fonction $x \longmapsto |x|$ continue sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas dérivable en $x = 0$.
Preuve
Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Pour tout réel $x \neq a$, on a $f(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a)$.

Alors comme $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$ et comme $\lim_{x \to a}(x - a) = 0$, par produit de limites, on obtient que $\lim_{x \to a} f(x) = f'(a) \times 0 + f(a) = f(a)$. Donc f est continue en a.

Théorème:

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ est bornée.

En fait on peut même démontrer que dans ces conditions, f atteint ses bornes.

Preuve: **Hors programme.** La preuve se fait par l'absurde à l'aide de suites dichotomiques.

Théorème:

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors $f(I) = \{f(x);\ x \in I\}$ est un intervalle de même nature que I.
Si I est fermé, $f(I)$ est fermé, si I est ouvert, $f(I)$ est ouvert et si I est semi-ouvert semi-fermé, alors $f(I)$ est semi-ouvert semi-fermé.

On utilise sans cesse ce résultat de continuité quand on utilise le théorème de bijection.

Preuve: **Hors programme.** La preuve fait appel à des notions sur la structure de l'ensemble des réels.

Théorème:

Toute fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de dérivée nulle sur I est constante sur I.

Ce théorème est fondamental en analyse, on l'utilisera quand on intéressera à la fonction exponentielle et plus tard au calcul intégral. Son intérêt est surtout théorique.
Il semble assez naturel néanmoins.
Preuve: **Hors programme.**

□

4.3 Théorème du point fixe: composition de fonctions et de suites

Théorème:

Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$.
Soit (u_n) la suite définie par récurrence avec $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente vers $\ell \in I$ alors sa limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Ce théorème infirme l'observation graphique de la représentation en toile d'araignée d'une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Preuve:

□

4.4 Quelques preuves

Théorème: produit de limites finies

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,g(x) = \ell\,\ell'$.

Preuve
Certains cas sont plus facile:

Théorème: produit de limites infinies

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,g(x) = +\infty$.

Preuve:

Théorème: Un cas de comparaison

Si pour tout réel $x \in]x_0; +\infty[$, $f(x) \le g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Preuve:

Théorème: Gendarmes

Soit u, v et f trois fonctions définies sur un voisinage I de a ($a \in \mathbb{R}$, a^+, a^-, $+\infty$ ou $-\infty$) avec le cas échéant $a \in I$ ou $a \notin I$.
Soit V voisinage de a, tel que pour tout réel $x \in V \cap I$, $u(x) \le f(x) \le v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Preuve:

Théorème: Composées

Soit f une fonction définie sur un voisinage I de a $(a \in \mathbb{R}, a^+, a^-, +\infty$ ou $-\infty)$ avec le cas échéant $a \in I$ ou $a \notin I$.
Soit g une fonction définie sur un voisinage J de b $(b \in \mathbb{R}, b^+, b^-, +\infty$ ou $-\infty)$ avec le cas échéant $b \in J$ ou $b \notin J$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.

Preuve: Prenons par exemple a, b, $\ell \in \mathbb{R}$. Les autres cas se traitent de manière identique.

□

4.5 Conséquences

Les propriétés de calcul de limites permettent de justifier les propriétés liées à la continuité ou à la dérivabilité.

4.5.1 Continuité

Théorème: Continuité

Si les fonctions f et g sont continues en a alors, la somme $f + g$, le produit $f\,g$, l'inverse $\frac{1}{f}$(avec $f(a) \neq 0$) et le quotient $\frac{f}{g}$ (avec $g(a) \neq 0$) sont continues en a.

Si les fonctions f et g sont continues sur $I \subset \mathbb{R}$, alors la somme $f + g$, le produit $f\,g$, l'inverse $\frac{1}{f}$(avec $f(x) \neq 0$ pour $x \in I$) et le quotient $\frac{f}{g}$ (avec $g(x) \neq 0$ pour $x \in I$) sont continues sur I.

Si la fonction f est continue en a et la fonction g est continue en $b = f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.
Si la fonction f est continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et la fonction g est continue sur $J \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Preuve:
Il suffit d'appliquer les propriétés de calcul de limites.

□

4.5.2 Dérivation

Théorème: Continuité

Si les fonctions f et g sont dérivables en a alors, la somme $f + g$, le produit $f\,g$, l'inverse $\frac{1}{f}$(avec $f(a) \neq 0$) et le quotient $\frac{f}{g}$ (avec $g(a) \neq 0$) sont dérivables en a.

Si les fonctions f et g sont dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, alors la somme $f + g$, le produit $f\,g$, l'inverse $\frac{1}{f}$(avec $f(x) \neq 0$ pour $x \in I$) et le quotient $\frac{f}{g}$ (avec $g(x) \neq 0$ pour $x \in I$) sont dérivables sur I.

Si la fonction f est dérivable en a et la fonction g est dérivable en $b = f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a.
Si la fonction f est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et la fonction g est dérivable sur $J \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I.

Preuve:
Les preuves doivent dans ce cas, sauf pour la somme qui est triviale, être examinée de plus près, à cause des formules.

Théorème: Dérivation du produit

Si les fonctions f et g sont dérivables en a, alors le produit $f\,g$ est dérivable en a et $(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$

Preuve:

Théorème: Dérivation de l'inverse

Si la fonction f est dérivable en a et $f(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{(f(a))^2}$.

Preuve:

Remarque: Le quotient se déduit de l'égalité $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$.

Théorème: Dérivation de la composée

Si la fonction f est dérivable en a et si la fonction g est dérivable en $b = f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Preuve:

□