Limites (calculs)

Limites usuelles:

■ Infinie en l'infini

★ $+\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} ax+b = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ -\infty & \text{si } a<0 \end{cases}$ ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ pour tout entier naturel p non nul ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier naturel n non nul.

★ $-\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} ax+b = \begin{cases} -\infty & \text{si } a>0 \\ +\infty & \text{si } a<0 \end{cases}$ ◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} +\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ pair non nul} \\ -\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ impair non nul} \end{cases}$

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

■ Finies en l'infini

★ $+\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ pour tout entier naturel p non nul.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

★ $-\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ pour tout entier naturel p non nul.

◊ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ ou $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ ◊ $\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ ou $\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$

◊ $\lim_{x\to-\infty} x^n\, e^x = 0$ pour tout entier naturel n non nul

Infinie en un point fini

◊ $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ◊ $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

◊ $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ◊ $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ on peut noter $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

◊ $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^p} = +\infty$ pour tout entier naturel p non nul.

◊ $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} +\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ non nul } \textbf{pair} \\ -\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ non nul } \textbf{impair} \end{cases}$

◊ $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

Finies en un point fini

◊ $\lim_{x\to n-} E(x) = n-1$ et $\lim_{x\to n^+} E(x) = n$ pour tout entier relatif n .

$\lim_{x\to x_0} E(x) = E(x_0)$ pour tout réel $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

◊ $\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ et même $\lim_{x\to0^+} x^n \ln(x) = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

◊ **Continuité:**

Définition:
• Une fonction f est dite continue en un point a de son ensemble de définition (resp à droite de a , resp à gauche de a) si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (resp $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, resp $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$).

• Une fonction f est dite continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en tout point a de I.

Théorème:
Toutes les fonctions usuelles (affines, carré, puissances, inverse, puissances inverses, racine, cos, sin, valeur absolue), leurs sommes, produits, composées,... sont continues sur leurs ensembles de définition.

$\lim_{x\to x_0} a\,x + b = a\,x_0 + b$ $\lim_{x\to x_0} x^2 = {x_0}^2$ $\lim_{x\to x_0\neq0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$

$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ avec P polynôme

$\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$ $\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$

$\lim_{x\to a} e^x = e^a$ pour tout réel a et $\lim_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$ pour tout réel $a > 0$.

..................................et cætera.

◊ **Cas particulier :** $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Opérations

Dans tous les tableaux, la lettre a représente un réel, un réel par valeurs inférieures a^-, un réel par valeurs supérieures a^+, $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite de la somme

	$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**
	$-\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$

Une seule forme indéterminée (F.I.): “ $\infty - \infty$ ”.

Exemples de F.I. : a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\right) = +\infty$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2\right) = -\infty$ **c.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-(x+1)) = -1$ **.**

Les cas sus-cités sont des aide-mémoires / contre-exemples pour permettre de situer ce qu'est une forme indéterminée: un cas où les conditions ne sont pas suffisantes pour pouvoir conclure puisque, dans ces conditions, plusieurs résultats peuvent être envisagés.

Une forme indéterminée n'est pas un résultat. Cela indique qu'il faut transformer l'expression pour pouvoir effectuer le calcul de limites.

Limite du produit

<table>
<tr><td></td><td>$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$\ell = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\ell\times\ell'$</td><td rowspan="3">**0**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' = 0$</td><td colspan="2">**0**</td><td colspan="2">**F.I.**</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">**F.I.**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Une seule forme indéterminée: “$\infty \times 0$ ”.

Exemples de F.I.: a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 \times \frac{1}{x}\right)$ **b.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x \times \frac{1}{x}\right)$ **c.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x \times \frac{1}{x^2}\right)$

Limite de l'inverse:

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	**0**	**0**

Limite du quotient:

<table>
<tr><td></td><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$\ell = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\dfrac{\ell}{\ell'}$</td><td rowspan="2">**0**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' = 0^+$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">**F.I.**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' = 0^-$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td colspan="2" rowspan="2">**0**</td><td rowspan="2">**0**</td><td colspan="2" rowspan="2">**F.I.**</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

2 formes indéterminées: "$\dfrac{\infty}{\infty}$" ou "$\dfrac{0}{0}$".

Exemples de F.I.: a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right)=+\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x}\right)=1$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2}\right)=0$

Composition:

Théorème:
Soit a, b et l des réels, des réels «à gauche» , des réels «à droite», $+\infty$ ou $-\infty$ (indépendamment les uns des autres).
Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et g une fonction définie sur un voisinage de b.
Alors si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et si $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\ell$, on a $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\ell$.

Exemples:

• On a $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=+\infty$.

• On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}\cos(X)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$.

• Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On remarque que pour tout réel $x>0$, $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et comme $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin(X)}{X}=1$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$.

Remarque:
La difficulté réside dans la limite intermédiaire (en bleu). Elle disparaît au résultat mais est essentielle pour le calcul de limites. C'est même la clef du calcul.

Calculs de limites: rédaction

Pour calculer une limite, il faut:

- utiliser les limites de références
- montrer clairement que l'on applique les résultats de la somme, du produit, de l'inverse, du quotient ou de la composée.

Calculer une limite demande souvent un **travail préliminaire de décomposition de la fonction en opérations élémentaires (somme, produit, inverse, quotient, composée).**

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(-1 + \frac{1}{x}\right) - \sqrt{x^2+3}$:

◊ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\sin(x) - 1}$:

◊ $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x - \cos(2\pi x)}$. On pose $\phi(x) = \sqrt{x - \cos(2\pi x)}$.

◊ Déterminer les limites de $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ aux bornes de son ensemble de définition.

Calculs de limites: Forme indéterminée.

A: factoriser par le terme (en général un monôme) de plus haut degré.

◊ $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^5 + 1000x^2 + 10^7$

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + x + 2}{5x^4 - 3x^3 + 2x + 1}$

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + x + 2}{5x^3 + 2x + 1}$

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-3x^4 + x + 2}{x^3 + 2x + 1}$

◊ **Généralisation**

Polynômes:

Soit $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$ et $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n . Alors $P_n(x)$ se comporte en $+\infty$ et en $-\infty$ comme son terme de plus haut degré $a_n x^n$.

En effet pour $x \neq 0$, $P_n(x) = a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = a_n x^n \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_n x^{n-i}}$.

Or comme pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ et $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1 > 0$ et $\lim\limits_{n \to -\infty}\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1 > 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$ et

$\lim\limits_{n \to -\infty} a_n x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$.

Fonctions rationnelles:

Soit $Q(x) = \dfrac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0}{b_p\, x^p + a_{p-1}\, x^{p-1} + \ldots + b_1\, x + b_0}$ une fonction rationnelle de degré $n - p$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$ et $a_n \neq 0$ et avec $b_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{0; 1; \ldots; p\}$ et $b_p \neq 0$. Alors $Q(x)$ se comporte en l'infini comme le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son numérateur.

En effet, pour $x \neq 0$, et $x \in D_Q$,

$$Q(x) = \frac{a_n\, x^n}{b_p\, x^p} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\, x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n\, x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n\, x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p\, x} + \ldots + \frac{b_1}{a_p\, x^{p-1}} + \frac{b_0}{b_p\, x^p}} = \frac{a_n}{b_p}\, x^{n-p} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\, x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n\, x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n\, x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p\, x} + \ldots + \frac{b_1}{a_p\, x^{p-1}} + \frac{b_0}{b_p\, x^p}}.$$

Or on a montré que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n\, x} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n\, x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n\, x^n}\right) = 1 > 0$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{b_{p-1}}{b_p\, x} + \ldots + \dfrac{b_1}{b_p\, x^{p-1}} + \dfrac{b_0}{b_p\, x^p}\right) = 1 > 0$.

Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n\, x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n\, x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n\, x^n}}{1+\frac{b_{p-1}}{b_p\, x}+\ldots+\frac{b_1}{a_p\, x^{p-1}}+\frac{b_0}{b_p\, x^p}} = 1 > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_p}\, x^{n-p} \times \dfrac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\, x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n\, x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n\, x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p\, x} + \ldots + \frac{b_1}{a_p\, x^{p-1}} + \frac{b_0}{b_p\, x^p}} = \dfrac{a_n}{b_p} \lim\limits_{n \to +\infty} x^{n-p}$.

De même en $-\infty$.

Ainsi on peut distinguer 3 cas:

- $n > p$, la limite en l'infini de $Q(x)$ est infinie
- $n = p$, la limite de $Q(x)$ en l'infini est $\dfrac{a_n}{b_p} \in \mathbb{R}^*$
- $n < p$, la limite de $Q(x)$ en l'infini est 0.

B: quantité conjuguée (souvent pour les racines carrées en l'infini)

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$

◊ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

◊ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

◊ Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 3\,x + 1}$ admet la droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ comme asymptote oblique en $+\infty$.

Qu'en est-il en $-\infty$?

C: Simplification

◊ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4}{x^2 - 4}$ (on pourra factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - 2$)

◊ $\lim\limits_{x \to 0} x \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

D: Comparaison

Théorème:

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \le \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, si ces limites existent.
En particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
• Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a ($a \in \mathbb{R}$, $a = a^+$, $a = a^-$, $a = +\infty$, ou $a = -\infty$) telles que pour x voisin de a, $f(x) \le g(x)$.
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$, si ces limites existent.
En particulier si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x)$

◊ Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2-\cos(x)} \le 1$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2-\cos(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)}$.

E: Théorème des gendarmes

Théorème:
• Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \le v_n \le w_n$ à partir d'un certain rang et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
• Soit f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de a ($a \in \mathbb{R}$, $a = a^+$, $a = a^-$, $a = +\infty$, ou $a = -\infty$) telles que pour x voisin de a, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.
Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$

◊ $\lim\limits_{x\to0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x}$

◊ $\lim\limits_{x\to0} x\, E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

◊ On admet que pour tout réel $x \ge 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin(x) \le x$. Calculer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x-\sin(x)}{x^2}$.

Remarque: Comment montrerait-on l'inégalité admise ?

F: Nombre dérivé

On reconnaît un taux d'accroissement d'une fonction en un point fini. On utilise les résultats de la dérivation pour conclure.

Définition:
• Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} T_{f,a}(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ et on note alors cette limite $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a . On dit alors que la fonction f est dérivable en a.
On a aussi $f'(a) = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
• Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en a, pour tout $a \in I$.

◊ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$

◊ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

G: Pas de limite

On raisonne par l'absurde en utilisant la définition des limites.

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x)$

◊ $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$