Limites (calculs)

Limites usuelles:

Infinie en l'infini

★ $+\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} ax+b = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ -\infty & \text{si } a<0 \end{cases}$ ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = +\infty$ pour tout entier naturel p non nul ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} |x| = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout entier naturel n non nul.

★ $-\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} ax+b = \begin{cases} -\infty & \text{si } a>0 \\ +\infty & \text{si } a<0 \end{cases}$ ◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^p = \begin{cases} +\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ pair non nul} \\ -\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ impair non nul} \end{cases}$

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} |x| = +\infty$

Finies en l'infini

★ $+\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ pour tout entier naturel p non nul.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

★ $-\infty$:

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$ pour tout entier naturel p non nul.

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ ◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0$

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$ pour tout entier naturel n non nul

Infinie en un point fini

◊ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ◊ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ◊ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ on peut noter $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

◊ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x^p} = +\infty$ pour tout entier naturel p non nul.

◊ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^p} = \begin{cases} +\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ non nul } \textbf{pair} \\ -\infty & \text{pour tout entier naturel } p \text{ non nul } \textbf{impair} \end{cases}$

◊ $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

Finies en un point fini

◊ $\lim\limits_{x\to n-} E(x) = n-1$ et $\lim\limits_{x\to n^+} E(x) = n$ pour tout entier relatif n .

$\lim\limits_{x\to x_0} E(x) = E(x_0)$ pour tout réel $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

◊ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ et même $\lim\limits_{x\to0^+} x^n\ln(x) = 0$ pour tout entier naturel n non nul.

◊ **Continuité:**

Définition:
• Une fonction f est dite continue en un point a de son ensemble de définition (resp à droite de a , resp à gauche de a) si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ (resp $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, resp $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$).

• Une fonction f est dite continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en tout point a de I.

Théorème:
Toutes les fonctions usuelles (affines, carré, puissances, inverse, puissances inverses, racine, cos, sin, valeur absolue), leurs sommes, produits, composées,… sont continues sur leurs ensembles de définition.

$\lim\limits_{x\to x_0} a\,x + b = a\,x_0 + b$ $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = {x_0}^2$ $\lim\limits_{x\to x_0\neq0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$

$\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$ avec P polynôme

$\lim\limits_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$ $\lim\limits_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$

$\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$ pour tout réel a et $\lim\limits_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$ pour tout réel $a > 0$.

……………………………….et cætera.

◊ **Cas particulier :** $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Opérations

Dans tous les tableaux, la lettre a représente un réel, un réel par valeurs inférieures a^-, un réel par valeurs supérieures a^+, $+\infty$ ou $-\infty$.

Limite de la somme

<table>
<tr><td></td><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}$</td><td>$\ell + \ell'$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>**F.I.**</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>**F.I.**</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

Une seule forme indéterminée (F.I.): " $\infty - \infty$ ".

Exemples de F.I. : a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 - x\right) = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x^2\right) = -\infty$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - (x+1)) = -1$ **.**

Les cas sus-cités sont des aide-mémoires / contre-exemples pour permettre de situer ce qu'est une forme indéterminée: un cas où les conditions ne sont pas suffisantes pour pouvoir conclure puisque, dans ces conditions, plusieurs résultats peuvent être envisagés.

Une forme indéterminée n'est pas un résultat. Cela indique qu'il faut transformer l'expression pour pouvoir effectuer le calcul de limites.

Limite du produit

<table>
<tr><td></td><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$\ell = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\ell \times \ell'$</td><td rowspan="3">**0**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' = 0$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">**F.I.**</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">**F.I.**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Une seule forme indéterminée: "$\infty \times 0$ ".

Exemples de F.I.: a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 \times \frac{1}{x}\right)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x \times \frac{1}{x}\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x \times \frac{1}{x^2}\right)$

Limite de l'inverse:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	**0**	**0**

Limite du quotient:

<table>
<tr><td></td><td>$\lim\limits_{x \to a} f(x)$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$\ell = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$\lim\limits_{x \to a} g(x)$</td><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{+*}$</td><td colspan="2" rowspan="2">$\dfrac{\ell}{\ell'}$</td><td rowspan="2">**0**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' \in \mathbb{R}^{-*}$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' = 0^+$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">**F.I.**</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\ell' = 0^-$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td colspan="2" rowspan="2">**0**</td><td rowspan="2">**0**</td><td colspan="2" rowspan="2">**F.I.**</td></tr>
<tr><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

2 formes indéterminées: “$\dfrac{\infty}{\infty}$” ou “ $\dfrac{0}{0}$”.

Exemples de F.I.: a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x}\right) = +\infty$ **b.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x}\right) = 1$ **c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x^2}\right) = 0$

Composition:

Théorème:
Soit a, b et l des réels, des réels «à gauche» , des réels «à droite», $+\infty$ ou $-\infty$ (indépendamment les uns des autres).
Soit f une fonction définie sur un voisinage de a et g une fonction définie sur un voisinage de b.
Alors si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$, on a $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \ell$.

Exemples:

• On a $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x+1}{x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}} = +\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \cos(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

• Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On remarque que pour tout réel $x > 0$, $x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Alors comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et comme $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$, par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ d’où

$\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Remarque:
La difficulté réside dans la limite intermédiaire (en bleu). Elle disparaît au résultat mais est essentielle pour le calcul de limites. C’est même la clef du calcul.

Calculs de limites: rédaction

Pour calculer une limite, il faut:
- utiliser les limites de références
- montrer clairement que l'on applique les résultats de la somme, du produit, de l'inverse, du quotient ou de la composée.

Calculer une limite demande souvent un **travail préliminaire de décomposition de la fonction en opérations élémentaires (somme, produit, inverse, quotient, composée).**

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)-\sqrt{x^2+3}$:

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-1<0$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

Par **produit** de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc par **composition** de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}-\sqrt{x^2+3}=-\infty$.

Enfin, par **somme** de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)+\left(-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x^2+3}\right)=-\infty$.

◊ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1}{2\sin(x)-1}$:

Remarque a priori: On a $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ donc $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-1=0$.
Par suite, on est amené à déterminer la limite de l'inverse d'une fonction qui tend vers 0. Il faut donc connaître le signe de l'expression $2\sin(x)-1$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{6}$.

La fonction sin est croissante sur $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, par suite $\sin(x)\le\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ pour $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ et $\sin(x)\ge\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ pour $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que $\sin(x)<\dfrac{1}{2}$ pour $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right[$ et $\sin(x)>\dfrac{1}{2}$ pour $x\in\left]\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi $2\sin(x)-1<0$ pour $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{6}\right[$ et $2\sin(x)-1>0$ pour $x\in\left]\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

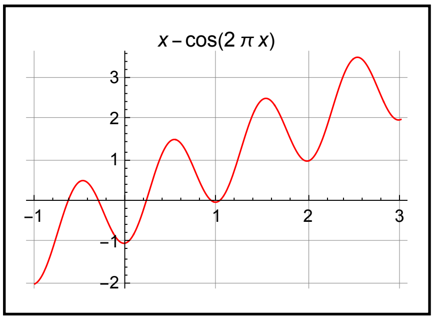
On obtient donc $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^-} 2\sin(x)-1=0^-$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+} 2\sin(x)-1=0^+$.

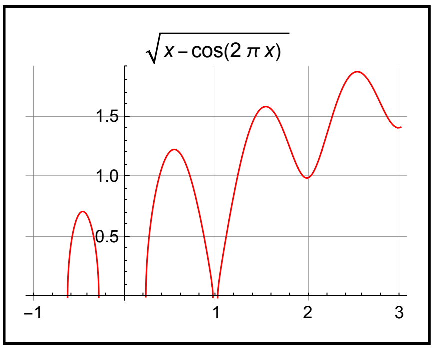
Par **inverse** de limites, on en déduit $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^-}\dfrac{1}{2\sin(x)-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+}\dfrac{1}{2\sin(x)-1}=+\infty$.

◊ $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x-\cos(2\pi x)}$. On pose $\phi(x)=\sqrt{x-\cos(2\pi x)}$.

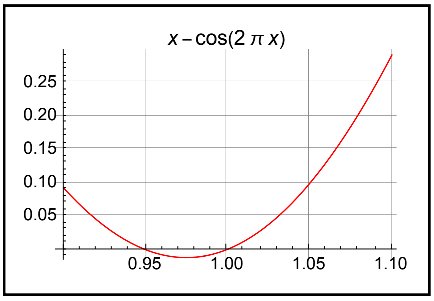
Remarque:
La fonction $\varphi: x\mapsto x-\cos(2\pi x)$ n'est pas une fonction que nous connaissons.
De plus il faut déterminer a priori sur quels ensembles cette fonction est positive, puisqu'on la compose avec $\sqrt{}$.
Les courbes représentatives sont données par:

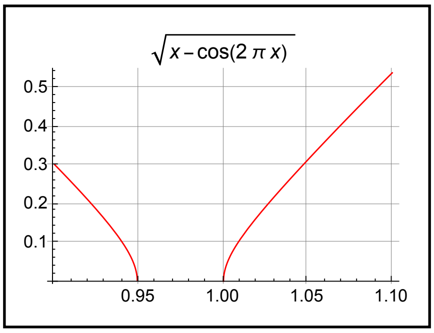
Sur [−1 ; 3]





Sur [0,9 ; 1,1]





On remarque que $\varphi(1) = 1 - \cos(2\pi) = 0$.
Étudions les variations de φ au voisinage de 1.
On a $\varphi'(x) = 1 + 2\pi \sin(2\pi x)$.

Or on sait que la fonction sin est strictement croissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ et que $\sin(2\pi) = 0$ donc la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$ à valeurs dans $[-1; 1]$.

En effet l'image de l'intervalle $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$ par la fonction $x \mapsto 2\pi x$ est $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Résolvons $\varphi'(x) > 0$ pour x dans le voisinage de 1, $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

On résout $1 + 2\pi\sin(2\pi x) > 0$ d'où $\sin(2\pi x) > -\frac{1}{2\pi}$.

Comme $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$ à valeurs dans $[-1; 1]$ et que de plus $-\frac{1}{2\pi} \in [-1; 1]$, alors le théorème de bijection, permet d'affirmer que l'équation $\sin(2\pi x) = -\frac{1}{2\pi}$ admet une unique solution dans $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.
Notons α cette solution.

Comme $\sin(2\pi \times 1) = 0 > -\frac{1}{2\pi}$, on peut affirmer que $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ et comme $x \mapsto \sin(2\pi x)$ est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{4}; \alpha\right]$ et sur $\left[\alpha; \frac{5}{4}\right]$ que $\sin(2\pi x) < \sin(\alpha)$ pour $x \in \left[\frac{3}{4}; \alpha\right[$ et $\sin(2\pi x) > \sin(\alpha)$ pour $x \in \left]\alpha; \frac{5}{4}\right]$.

On en déduit $\sin(2\pi x) < -\frac{1}{2\pi}$ pour $x \in \left[\frac{3}{4}; \alpha\right[$ et $\sin(2\pi x) > -\frac{1}{2\pi}$ pour $x \in \left]\alpha; \frac{5}{4}\right]$.

Finalement $\varphi'(x) < 0$ pour $x \in \left[\frac{3}{4}; \alpha\right[$ et $\varphi'(x) > 0$ pour $x \in \left]\alpha; \frac{5}{4}\right]$.

Par suite la fonction φ est strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{4}; \alpha\right]$ et strictement croissante sur $\left[\alpha; \frac{5}{4}\right]$ avec $\frac{3}{4} < \alpha < 1$.

On obtient donc que pour tout réel $x \in [\alpha; 1[$, $\varphi(x) < \varphi(1)$ et pour tout réel $x \in \left]1; \frac{5}{4}\right]$, $\varphi(x) > \varphi(1)$ d'où pour tout réel $x \in [\alpha; 1[$, $\varphi(x) < 0$ et pour tout réel $x \in \left]1; \frac{5}{4}\right]$, $\varphi(x) > 0$.

On en déduit que la fonction $\phi : x \mapsto \sqrt{x - \cos(2\pi x)}$ est définie pour $x \in \left[1; \frac{5}{4}\right]$ mais n'est pas définie pour $\alpha \leq x < 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 1} \phi(x)$ est réduite à $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \phi(x)$.

Or ϕ est définie en 1 et $\phi(1) = 0$.

De plus ϕ est la composée de la fonction φ continue sur $\left[1; \frac{5}{4}\right]$ à valeurs dans $[0; +\infty[$ et de la fonction $\sqrt{\ }$ continue sur $[0; +\infty[$ donc ϕ est continue sur $\left[1; \frac{5}{4}\right]$.

On a donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \phi(x) = \phi(1) = 0$.

◊ Déterminer les limites de $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ aux bornes de son ensemble de définition.

Une rapide étude de signes montre que $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$ pour $x \in]-1; 1]$ donc $D_f = \left]-1; 1\right]$.

Il n'y a donc qu'une seule limite à étudier, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

Pour $x > -1$, $1 + x > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1 + x = 0^+$.

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 1 - x = 2 > 0$.

Donc par **quotient** de limites, $\lim\limits_{\substack{x -> -1 \\ x > -1}} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty$.

Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc par **composée** de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Calculs de limites: Forme indéterminée.

A: factoriser par le terme (en général un monôme) de plus haut degré.

◊ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3\,x^5 + 1000\,x^2 + 10^7$

Pour tout $x<0$, $\displaystyle 3\,x^5 + 1000\,x^2 + 10^7 = 3\,x^5\left(1 - \frac{1000}{3\,x^3} - \frac{10^7}{3\,x^5}\right)$.

Or on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi pour tout réel a, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x^n} = 0$.

Par suite, par somme de limites, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1000}{3\,x^3} - \frac{10^7}{3\,x^5}\right) = 1 > 0$.

De plus on sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ d'où comme $3>0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3\,x^5 = -\infty$.

Finalement par produit $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3\,x^5\left(1 - \frac{1000}{3\,x^3} - \frac{10^7}{3\,x^5}\right) = -\infty$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 3\,x^5 + 1000\,x^2 + 10^7 = -\infty$.

◊ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-3\,x^2 + x + 2}{5\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x + 1}$

Pour tout réel $x \neq 0$, $\displaystyle \frac{-3\,x^2 + x + 2}{5\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x + 1} = \frac{-3\,x^2}{5\,x^4} \times \frac{1 - \frac{1}{3\,x^2} - \frac{2}{3\,x^2}}{1\ \frac{3}{5\,x} + \frac{2}{5\,x^3} + \frac{1}{5\,x^4}} = -\frac{3}{5\,x^2} \times \frac{1 - \frac{1}{3\,x^2} - \frac{2}{3\,x^2}}{1 - \frac{3}{5\,x} + \frac{2}{5\,x^3} + \frac{1}{5\,x^4}}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{3\,x} - \frac{2}{3\,x^2} = 1 \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{5\,x} + \frac{2}{5\,x^3} + \frac{1}{5\,x^4} = 1 \neq 0$.

Par quotient de limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{3\,x} - \frac{2}{3\,x^2}}{1 - \frac{3}{5\,x} + \frac{2}{5\,x^3} + \frac{1}{5\,x^4}} = 1 > 0$.

Alors comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{5\,x^2} = 0$, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{5\,x^2} \times \frac{1 - \frac{1}{3\,x} - \frac{2}{3\,x^2}}{1 - \frac{3}{5\,x} + \frac{2}{5\,x^3} + \frac{1}{5\,x^4}} = 0$ d'où

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-3\,x^2 + x + 2}{5\,x^4 - 3\,x^3 + 2\,x + 1} = 0$.

◊ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3\,x^3 + x + 2}{5\,x^3 + 2\,x + 1}$

Pour tout réel $x \neq 0$, $\displaystyle \frac{3\,x^3 + x + 2}{5\,x^3 + 2\,x + 1} = \frac{3\,x^3}{5\,x^3} \times \frac{1 + \frac{1}{3\,x^2} + \frac{2}{3\,x^3}}{1 + \frac{2}{5\,x^3} + \frac{1}{5\,x^3}} = \frac{3}{5} \times \frac{1 + \frac{1}{3\,x^2} + \frac{2}{3\,x^3}}{1 + \frac{2}{5\,x^2} + \frac{1}{5\,x^3}}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{3\,x^2} + \frac{2}{3\,x^3} = 1 \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{5\,x^2} + \frac{1}{5\,x^3} = 1 \neq 0$.

Par quotient, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{3\,x^2} + \frac{2}{3\,x^3}}{1 + \frac{2}{5\,x^2} + \frac{1}{5\,x^3}} = 1$.

Alors on obtient que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5}\times\dfrac{1+\frac{1}{3x^2}+\frac{2}{3x^3}}{1+\frac{2}{5x^2}+\frac{1}{5x^3}} = \dfrac{3}{5}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+x+2}{5x^3+2x+1} = \dfrac{3}{5}$.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^4+x+2}{x^3+2x+1}$

Pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{-3x^4+x+2}{x^3+2x+1} = \dfrac{-3x^4}{x^3}\times\dfrac{1-\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3x^4}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = -3x\times\dfrac{1-\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3x^4}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{2}{3x^4} = 1\neq 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3} = 1\neq 0$.

Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3x^4}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = 1>0$.

On sait aussi que $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ donc par produit de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x\times\dfrac{1-\frac{1}{3x^3}+\frac{2}{3x^4}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = -\infty$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^4+x+2}{x^3+2x+1} = -\infty$.

◊ **Généralisation**

Polynômes:

Soit $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$ avec $a_i\in\mathbb{R}$ pour $i\in\{0;1;\ldots;n\}$ et $a_n\neq 0$, un polynôme de degré n . Alors $P_n(x)$ se comporte en $+\infty$ et en $-\infty$ comme son terme de plus haut degré $a_n x^n$.

En effet pour $x\neq 0$, $P_n(x) = a_n x^n\left(1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{a_n x^n}\right) = a_n x^n\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{a_i}{a_n x^{n-i}}$.

Or comme pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$ et $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{1}{x^k} = 0$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1>0$ et $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{a_n x^n}\right) = 1>0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n x^n\left(1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{a_n x^n}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n$ et

$\lim\limits_{n\to-\infty} a_n x^n\left(1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{a_n x^n}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$.

Fonctions rationnelles:

Soit $Q(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_p x^p + a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1 x + b_0}$ une fonction rationnelle de degré $n-p$ avec $a_i\in\mathbb{R}$ pour $i\in\{0;1;\ldots;n\}$ et $a_n\neq 0$ et avec $b_i\in\mathbb{R}$ pour $i\in\{0;1;\ldots;p\}$ et $b_p\neq 0$. Alors $Q(x)$ se comporte en l'infini comme le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son numérateur.

En effet, pour $x\neq 0$, et $x\in D_Q$,

$$Q(x) = \frac{a_n x^n}{b_p x^p}\times\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}}{1+\frac{b_{p-1}}{b_p x}+\ldots+\frac{b_1}{a_p x^{p-1}}+\frac{b_0}{b_p x^p}} = \frac{a_n}{b_p}x^{n-p}\times\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}}{1+\frac{b_{p-1}}{b_p x}+\ldots+\frac{b_1}{a_p x^{p-1}}+\frac{b_0}{b_p x^p}}.$$

Or on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\dfrac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{a_n x^n}\right)=1>0$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{b_{p-1}}{b_p x}+\ldots+\dfrac{b_1}{b_p x^{p-1}}+\dfrac{b_0}{b_p x^p}\right)=1>0$.

Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}}{1+\frac{b_{p-1}}{b_p x}+\ldots+\frac{b_1}{a_p x^{p-1}}+\frac{b_0}{b_p x^p}}=1>0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_p}x^{n-p}\times\dfrac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}}{1+\frac{b_{p-1}}{b_p x}+\ldots+\frac{b_1}{a_p x^{p-1}}+\frac{b_0}{b_p x^p}}=\dfrac{a_n}{b_p}\lim\limits_{n\to+\infty}x^{n-p}$.

De même en $-\infty$.

Ainsi on peut distinguer 3 cas:

- $n>p$, la limite en l'infini de $Q(x)$ est infinie
- $n=p$, la limite de $Q(x)$ en l'infini est $\dfrac{a_n}{b_p}\in\mathbb{R}^*$
- $n<p$, la limite de $Q(x)$ en l'infini est 0.

B: quantité conjuguée (souvent pour les racines carrées en l'infini)

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}-x$

Pour tout réel $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$, $\sqrt{x^2-1}-x=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}+x=+\infty$.

Par inverse de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$.

◊ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\sqrt{x^2+1}+(-x)$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}=+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}+(-x)=+\infty$.

Finalement $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=+\infty$.

◊ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Pour tout réel $x\neq0$, $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\dfrac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$.

Or par continuité, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+4}+2 = 4 \neq 0$ donc par inverse, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \dfrac{1}{4}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \dfrac{1}{4}$.

Remarque: on vient de démontrer à nouveau que $\left(x \mapsto \sqrt{x+4}\right)'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{0+4}} = \dfrac{1}{4}$.

◊ Montrer que la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x^2-3x+1}$ admet la droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ comme asymptote oblique en $+\infty$.
Qu'en est-il en $-\infty$?

Pour tout réel $x \in \left]-\infty; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$:

$$f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{x^2-3x+1} - \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+1} - \left(x-\frac{3}{2}\right)\right)\left(\sqrt{x^2-3x+1} + \left(x-\frac{3}{2}\right)\right)}{\sqrt{x^2-3x+1} + \left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2 - \left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-3x+1} + \left(x-\frac{3}{2}\right)}$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1} + \left(x-\frac{3}{2}\right)}.$$

x^2-3x+1 est un polynôme du second degré dont le coefficient des x^2 est $1 > 0$ donc on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+1 = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ alors par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+1} = +\infty$.

De plus on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{3}{2} = +\infty$ donc par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+1} + \left(x - \dfrac{3}{2}\right) = +\infty$.

Par inverse de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+1} + \left(x-\frac{3}{2}\right)} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1} + \left(x-\frac{3}{2}\right)} = 0$.

Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 0$: la droite d'équation $y = x - \dfrac{3}{2}$ est donc asymptote oblique à la courbe représentative de *f* en $+\infty$.

En $-\infty$, la droite $y = x - \dfrac{3}{2}$ n'est pas asymptote: on remarque facilement que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \dfrac{3}{2} = -\infty$.

Par contre, la droite d'équation $y = -x + \dfrac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de *f* .

En procédant comme précédemment, $f(x) - \left(-x + \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-3x+1} + \left(-x+\frac{3}{2}\right)}$ et donc

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \left(-x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$.

C: Simplification

◊ $\underset{x\to 2}{\text{Lim}} \dfrac{3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4}{x^2 - 4}$ (on pourra factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - 2$)

Remarquons que $3\times 2^3 - 7\times 2^2 + 4\times 2 - 4 = 0$ donc 2 est racine évodente du polynôme $3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4$.
Le polynôme $3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4$ se factorise par $x - 2$.
On détermine les réels a, b et c tels que $3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4 = (x-2)\left(a\,x^2 + b\,x + c\right)$.
Il est clair que $a = 3$.
Comme $(x-2)\left(3\,x^2 + b\,x + c\right) = 3\,x^3 + (b-6)\,x^2 + (c - 2\,b)\,x - 2\,c$, on déduit par identification $b = -1$ et $c = 2$.

Par suite pour tout réel $x \neq 2$, $\dfrac{3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4}{x^2 - 4} = \dfrac{(x-2)\left(3\,x^2 - x + 2\right)}{(x-2)\,(x+2)} = \dfrac{3\,x^2 - x + 2}{x + 2}$.

Or par continuité, $\underset{x\to 2}{\text{Lim}}\, 3\,x^2 - x + 2 = 12$ et $\underset{x\to 2}{\text{Lim}}\, x + 2 = 4 \neq 0$ d'où par inverse, $\underset{x\to 2}{\text{Lim}} \dfrac{3\,x^2 - x + 2}{x + 2} = 3$.

Par suite $\underset{x\to 2}{\text{Lim}} \dfrac{3\,x^3 - 7\,x^2 + 4\,x - 4}{x^2 - 4} = 3$.

◊ $\underset{x\to 0}{\text{Lim}}\, x \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$

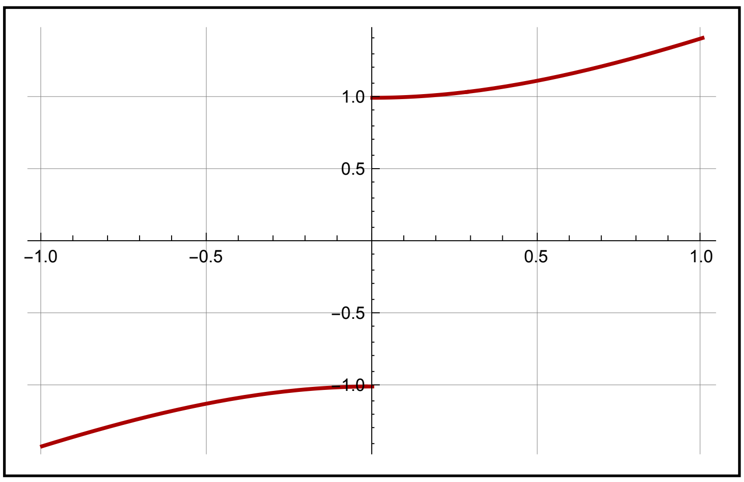
Pour tout réel $x > 0$, comme $x = \sqrt{x^2}$, $x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2 + 1}$.

Alors comme $\underset{x\to 0^+}{\text{Lim}}\, x^2 + 1 = 1 > 0$ et $\sqrt{}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\underset{x\to 0^+}{\text{Lim}} \sqrt{x^2 + 1} = 1$ et ainsi $\underset{x\to 0^+}{\text{Lim}}\, x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1$.

Pour tout réel $x < 0$, comme $x = -\sqrt{x^2}$, $x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = -\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = -\sqrt{x^2 + 1}$.

Alors comme $\underset{x\to 0^-}{\text{Lim}}\, x^2 + 1 = 1 > 0$ et $\sqrt{}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, $\underset{x\to 0^-}{\text{Lim}} \sqrt{x^2 + 1} = 1$ et ainsi $\underset{x\to 0^+}{\text{Lim}}\, x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}} = -1$.

Remarque: on obtient ainsi un cas de limite finie en un point fini, telle que la limite à droite est différente de la limite à gauche.
On a la représentation graphique:



D: Comparaison

Théorème:
• Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, si ces limites existent.
En particulier si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
• Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a ($a \in \mathbb{R}$, $a = a^+$, $a = a^-$, $a = +\infty$, ou $a = -\infty$) telles que pour x voisin de a, $f(x) \leq g(x)$.
Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$, si ces limites existent.
En particulier si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x)$

Pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ alors pour tout réel x, $x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$.

Par suite comme on sait que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \\ x - 1 \leq x + \cos(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$, on déduit des théorèmes de comparasion $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x) = +\infty$.

Remarque: on utilise en fait que l'un des deux côtés de l'inégalité.
Pour la limite en $-\infty$, on utiliserait l'autre $x + \cos(x) \leq x + 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$.

◊ Montrer que pour tout réel x, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1$ puis déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2 - \cos(x)}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x + \cos(x)}{2 - \cos(x)}$.

Pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ alors $-1 \leq -\cos(x) \leq 1$ et ainsi $0 \leq 1 \leq 2 - \cos(x) \leq 3$.
Ainsi $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos(x)} \leq 1$.

Pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 - \cos(x)} \leq x$.

Alors comme $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty \\ \frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 - \cos(x)} \text{ pour tout réel } x > 0 \end{cases}$, on déduit des théorèmes de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2 - \cos(x)} = +\infty$.

Pour tout réel $x > 1$, $x + \cos(x) > 0$ puisque $\cos(x) \geq -1$.
Ainsi pour tout réel x , $\frac{x + \cos(x)}{3} \leq \frac{x + \cos(x)}{2 - \cos(x)}$.

Alors comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \cos(x) = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \cos(x)}{3} = +\infty$ et donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \cos(x)}{2 - \cos(x)} = +\infty$.

E: Théorème des gendarmes

Théorème:
• Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

• Soit f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de a ($a \in \mathbb{R}$, $a = a^+$, $a = a^-$, $a = +\infty$, ou $a = -\infty$) telles que pour x voisin de a, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Pour tout réel x, $-1 \le \sin(x) \le 1$ donc pour tout réel $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin(x)}{x} \le \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Comme $\begin{cases} -\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin(x)}{x} \le \dfrac{1}{x} \text{ pour } x > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$, on obtient donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

◊ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout réel $x \ne 0$, $-1 \le \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le 1$.

Par suite, si $x > 0$, $-x \le x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le x$ et si $x < 0$, $-x \ge x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \ge x$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -x = 0$.

On a donc $\begin{cases} -x \le x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \le x \text{ pour } x > 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\begin{cases} -x \ge x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \ge x \text{ pour } x < 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Par suite $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

◊ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x}$

Pour tout réel x, $E(x) \le x < E(x) + 1$.
On a donc $E(x) \le x$ et comme $x < E(x) + 1$ alors $x - 1 < E(x)$.
Finalement $x - 1 < E(x) \le x$.

Par conséquent, pour tout réel $x > 0$, $1 - \dfrac{1}{x} < \dfrac{E(x)}{x} \le 1$.

Ainsi comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$.

On obtient donc $\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x} < \dfrac{E(x)}{x} \le 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \end{cases}$ et par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$.

◊ $\lim\limits_{x\to 0} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout réel $x \neq 0$, on a $E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x} < E\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$.

On en deeduit donc $E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$ et comme $x < E\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$ alors $\dfrac{1}{x} - 1 < E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ d'où $1 - \dfrac{1}{x} < E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq \dfrac{1}{x}$.

Alors pour $x > 0$, on obtient $x - 1 < x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$ et pour $x < 0$, on obtient $x - 1 > x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 1$.

Or $\lim\limits_{x\to 0} x - 1 = 0$ donc d'après le théorème deas gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ d'où

$\lim\limits_{x\to 0} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Remarque:

On pourrait aussi raisonner par composition en utilisant le résultat précédent puisque $x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{E\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Pour la limite en 0^-, il faudrait montrer $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{E(x)}{x} = 1$

◊ On admet que pour tout réel $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2}$.

Remarque: Comment montrerait-on l'inégalité admise ?

Comme pour tout réel $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$, alors $-x + \dfrac{x^3}{6} \geq -\sin(x) \geq -x$ d'où $\dfrac{x^3}{6} \geq x - \sin(x) \geq 0$.

Ainsi comme $x^2 \geq 0$, $\dfrac{x}{6} \geq \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} \geq 0$.

On a clairement $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{6} = 0$ et on obtient que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$.

Remarquons alors que pour $x < 0$, $-x > 0$ et que $\dfrac{x - \sin(x)}{x^2} = \dfrac{-(-x) + \sin(-x)}{(-x)^2} = -\dfrac{(-x) - (\sin(-x)}{(-x)^2}$ puisque $(-x)^2 = x^2$ et que la fonction sinus est impaire.

Alors $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(-x) - \sin(-x)}{(-x)^2} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{X - \sin(X)}{X^2} = 0$.

Finalement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$.

Remarque:

On montre l'inégalité en étudiant les variations de la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ et celles de la fonction $x \mapsto \sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$ (on utilise la dérivée tierce).

F: Nombre dérivé

On reconnaît un taux d'accroissement d'une fonction en un point fini. On utilise les résultats de la dérivation pour conclure.

Définition:
• Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$.
La fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} T_{f,a}(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$ et on note alors cette limite $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a . On dit alors que la fonction f est dérivable en a.
On a aussi $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
• Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$.
La fonction f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en a, pour tout $a \in I$.

◊ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$

Pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0}$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0)$ par définition du nombre dérivé.

On a donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = -\sin(0) = 0$.

◊ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Pour tout réel $x \neq 1$, $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1}$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} = \left(\sqrt{\ }\right)'(1)$ par définition du nombre dérivé.

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.

G: Pas de limite

On raisonne par l'absurde en utilisant la définition des limites.

◊ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x)$

Remarquons dans un premier temps que pour $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(2k\pi) = 1$ et que pour $x = (2k+1)\pi$, $\cos((2k+1)\pi) = -1$.

On raisonne par l'absurde: on suppose donc qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) = \ell$.

Remarquons que comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, alors par passage à la limite $-1 \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) \leq 1$ d'où $-1 \leq \ell \leq 1$.

Par définition de la limite, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que pour tout réel $x \in]x_0; +\infty[$, $\ell - \epsilon < \cos(x) < \ell + \epsilon$.
En particulier comme $\lim\limits_{k \to +\infty} 2k\pi = +\infty$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} (2k+1)\pi = +\infty$, il existe un entier k_0 tel que pour tout entier $k \geq k_0$, $2k\pi > x_0$ et $(2k+1)\pi > x_0$ et donc tel que pour tout $k \geq k_0$, $\ell - \epsilon < 1 < \ell + \epsilon$ et $\ell - \epsilon < -1 < \ell + \epsilon$.
On choisit alors $\epsilon = \frac{1}{2}$. On obtient donc que $\ell - \frac{1}{2} < 1 < \ell + \frac{1}{2}$ et $\ell - \frac{1}{2} < -1 < \ell + \frac{1}{2}$.

Par suite $-\frac{1}{2} < \ell - 1 < \frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2} < \ell + 1 < \frac{1}{2}$ d'où $\ell < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \ell$: absurde.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x)$ n'existe pas.

◊ $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Remarquons que pour tout entier relatif k, pour $x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi}$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right) = 1$ et pour

$x = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi}$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\right) = -1$.

On raisonne par l'absurde et on suppose que $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \ell \in \mathbb{R}$. Il est clair, par passage à la limite que $-1 \le \ell \le 1$.

Ainsi pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout réel $x \in]-\eta; \eta[\backslash\{0\}$, $\ell - \epsilon < \sin\left(\frac{1}{x}\right) < \ell + \epsilon$.

Or $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi} = 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi} = 0$ donc il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \ge k_0$,

$-\eta < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi} < \eta$ et $-\eta < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi} < \eta$.

Alors en choisissant $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ et un entier k_0, tel que pour tout entier $k \ge k_0$,

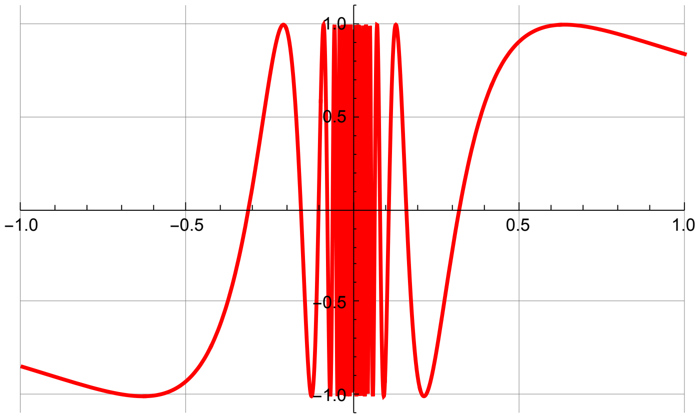
$-\eta < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi} < \eta$ et $-\eta < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi} < \eta$ et donc $\ell - \frac{1}{2} < \sin\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi}}\right) < \ell + \frac{1}{2}$ et

$\ell - \frac{1}{2} < \sin\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi}}\right) < \ell + \frac{1}{2}$.

D'où $\ell - \frac{1}{2} < 1 < \ell + \frac{1}{2}$ et $\ell - \frac{1}{2} < -1 < \ell + \frac{1}{2}$ et donc $-\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$: absurde.

Par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

Remarquons le graphe de la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0:



Plus x se rapproche de 0, plus la fonction oscille vite entre -1 et 1. Elle prend infiniment de fois toutes les valeurs entre -1 et 1 quand x se rapproche de 0.