Équations dans l'Espace.

On munit l'espace $\mathcal{E}$ d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$.

Système d'équations paramétriques.

On appelle ainsi la donnée de plusieurs équations faisant intervenir un ou plusieurs paramètres, permettant de caractériser un ensemble donné de points de l'espace.

Droites

Une droite est définie par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

Soit d la droite passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

Alors un point M appartient à la droite d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{v}$.
Soit $(x; y; z)$ les coordonnées de M.

Alors le point M appartient à la droite d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x - x_A = t\,\alpha \\ y - y_A = t\,\beta \\ z - z_A = t\,\gamma \end{cases}$ ou encore tel que $\begin{cases} x = t\,\alpha + x_A \\ y = t\,\beta + y_A \\ z = t\,\gamma + z_A \end{cases}$.

La droite d est donc l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x = t\,\alpha + x_A \\ y = t\,\beta + y_A\,;\ t \in \mathbb{R} \\ z = t\,\gamma + z_A \end{cases}$. Un tel système est appelé **système d'équations paramétriques** de la droite d.

Le nombre t est le paramètre.
À chaque t correspond un unique point de la droite et à chaque point de la droite un unique réel t.

Attention: une droite d admet une infinité de système d'équations paramétriques. Il suffit de changer le point de référence et/ou le vecteur directeur. L'unicité dépend du système choisi.

Remarque: On lit directement dans un tel système, les coordonnées d'un point de la droite et celle d'un vecteur directeur.

Plans

Un plan est défini par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires.

Soit P le plan passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs de base $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$.

Alors un point M appartient au plan P si et seulement s'il existe des réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + t'\,\vec{v}$.
Soit $(x; y; z)$ les coordonnées de M.

Alors le point M appartient au plan P si et seulement s'il existe des réels t et t' tels que $\begin{cases} x - x_A = t\,\alpha + t'\,\alpha' \\ y - y_A = t\,\beta + t'\,\beta' \\ z - z_A = t\,\gamma + t'\,\gamma' \end{cases}$ ou encore tels que $\begin{cases} x = t\,\alpha + t'\,\alpha' + x_A \\ y = t\,\beta + t'\,\beta' + y_A \\ z = t\,\gamma + t'\,\gamma' + z_A \end{cases}$.

Le plan P est donc l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant le système $\begin{cases} x = t\,\alpha + t'\,\alpha' + x_A \\ y = t\,\beta + t'\,\beta' + y_A \\ z = t\,\gamma + t'\,\gamma' + z_A \end{cases}$ avec $t, t' \in \mathbb{R}$. Un tel système est appelé **système d'équations paramétriques** du plan P.

Les nombres t et t' sont les paramètres.

À chaque couple $(t; t')$ correspond un unique point du plan et à chaque point du plan un unique couple $(t; t')$.

Attention: un plan P admet une infinité de système d'équations paramétriques. Il suffit de changer le point de référence et/ou les vecteurs de base. L'unicité dépend du système choisi.

Remarque: On lit directement dans un tel système, les coordonnées d'un point du plan et celles des vecteurs de base.

Équations cartésiennes de plans.

Théorème:

Un plan P admet une équation cartésienne de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(A; b; c) \neq (0; 0; 0)$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P.

Réciproquement, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tel que $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Conséquence:

L'espace est partagé en 3 régions: 2 demi-espaces et un plan:

- l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tel que $a\,x + b\,y + c\,z + d > 0$;
- l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tel que $a\,x + b\,y + c\,z + d < 0$;
- l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ tel que $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

Remarque: **une droite de l'espace n'admet pas d'équation cartésienne!!**

Équation d'une sphère.

La sphère de centre Ω de coordonnées $(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

Elle admet donc pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$.

En conséquence:

- l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 \leq R^2$ est la boule de centre Ω et de rayon R, sphère incluse;
- l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 > R^2$ est l'espace privé de la boule de centre Ω et de rayon R.

Théorème:

Soit (E) l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

Alors (E) est ou une sphère, ou un point ou l'ensemble vide.

Preuve:

En effet $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2+d-\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Alors l'équation $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ s'écrit
$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2+\left(z-\frac{c}{2}\right)^2=-d+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Par suite, comme un carré est toujours positif ou nul:

• si $-d+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)>0$, l'équation est celle de la sphère S de centre $\Omega\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{-d+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ et $(E)=S$.

• si $-d+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)=0$, l'équation a une unique solution, le triplet $\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$ que l'on pourrait assimiler à la sphère de centre $\Omega\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$ et de rayon 0 et $(E)=\{\Omega\}$.

• $-d+\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)<0$: l'équation n'admet pas de solution et $(E)=\emptyset$.

Interprétation des systèmes

Il y a de multiples cas de systèmes d'équations ou d'inéquations d'ensemble de l'espace. Nous citerons ici quelques cas qu'il est préférable d'avoir en tête, permettant d'avoir une idée de ce que l'on peut rencontrer.

Cas 1: système de 2 équations cartésiennes, i.e. de 2 équations linéaires à 3 inconnues.

Soit le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$.

On a donc deux équations cartésiennes de plan.
Il y a donc 3 cas:

• les 2 plans sont parallèles disjoints: aucune solution.
• les 2 plans sont parallèles confondus: une infinité de solutions, tous les points du plan.
• les 2 plans sont sécants, leur intersection est une droite.
Dans l'espace, une droite est représentée par un système d'équations cartésiennes.

Les 2 premiers cas, sont dits cas dégénérés et doivent être vite repérés: on a en effet proportionnalité entre les coefficients $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ et éventuellement d et d'.
Le cas général est le cas de la droite.

Cas 2: système de 3 équations cartésiennes, i.e. de 3 équations linéaires à 3 inconnues.

Soit le système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{array}\right.$.

On a 3 équations cartésiennes de plans.
Ainsi on a les cas:

• 3 plans confondus: une infinité de solutions, le plan en entier.
• au moins 2 plans parallèles distincts: aucune solution.

• les 3 plans s'intersectent suivant une même droite: une infinité de solution, les coordonnées des points de la droite.

• les 3 plans s'intersectent en un point: le système admet une unique solution, les coordonnées de ce point.

Les 3 premiers cas sont dits dégénérés, le dernier cas est le cas général.

Cas 3: système d'une équation cartésienne et d'un système d'équations paramétriques.

Soit le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x=t\alpha+x_A \\ y=t\beta+y_A \\ z=t\gamma+z_A \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

On a donc l'intersection d'un plan et d'une droite.

En général, sauf si la droite est incluse dans le plan ou strictement parallèle au plan, le système admet donc un unique triplet solution, les coordonnées du point d'intersection de la droite avec le plan.

En particulier, si la droite est orthogonale au plan, on obtient les coordonnées du projeté orthogonale d'un point de la droite dans le plan.

Cas 4: système d'inéquations cartésiennes.

On a vu qu'un plan partitionne l'espace en 3 domaines distincts, 3 régions de l'espace.

En utilisant un système d'inéquations cartésiennes, on délimite ainsi un domaine de l'espace.

Par exemple $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$ est le cube unité.

On peut ainsi définir tout polyèdre par un système d'inéquations faisant intervenir les plans de ses faces.

Cas 5: système d'une équation cartésienne de plan et d'une équation de sphère.

Le système $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2 \end{cases}$ est l'intersection si elle existe, c'est à dire si la distance du centre Ω de la sphère au plan est inférieure ou égale au rayon R de la sphère correspond à l'équation d'un cercle éventuellement réduit à un point.

En effet si la distance du centre au plan est égale au rayon, alors le plan est tangent à la sphère.

Cas 6: système d'une équation de sphère et d'un système d'équations paramétriques.

Soit le système $\begin{cases} (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2 \\ x=t\alpha+x_A \\ y=t\beta+y_A \\ z=t\gamma+z_A \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

Les solutions du système correspondent aux coordonnées des points d'intersection de la droite de système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=t\alpha+x_A \\ y=t\beta+y_A \\ z=t\gamma+z_A \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ avec la sphère.

Un tel système aura ou 2 triplets solutions, la droite traverse la sphère, ou 1 triplet solution, la droite est tangente au cercle ou aucune solution, la droite n'intersecte pas la sphère.