Produit scalaire dans l'espace.

Produit scalaire: Définitions.

Définitions du produit scalaire:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le **nombre réel**, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par l'une des relations suivantes:

(i). $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$;

(ii). si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$;

(iii). si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$.

Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\,\|\vec{v'}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v'} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v'}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v'} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$.

(iv). dans une **base orthonormée** $\left(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$ du plan, si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$.

Preuve:

Conséquences:

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. On note par convention, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe un réel k tel que $\vec{u}\cdot\vec{v} = k\|\vec{u}\|^2$.

Remarque: On a aussi:

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Preuve:

$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 =$
$\left(x^2+y^2+z^2\right) + \left((x')^2+(y')^2+(z')^2\right) - \left(x^2+y^2+z^2+(x')^2+(y')^2+(z')^2 - 2\,x\,x' - 2\,y\,y' - 2\,z\,z'\right)$ d'où
$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\,(x\,x' + y\,y' + z\,z')$.

Pour la deuxième relation, il suffit d'additionner les 2 autres.

Propriétés.

Théorème (propriétés du produit scalaire)

- **symétrie:** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;

• **bilinéarité (linéarité par rapport aux deux variables):**

◊ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

◊ $\left(\lambda\,\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

◊ $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

◊ $\vec{u}\cdot\left(\lambda\,\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

Preuve:

Conséquence:

$\left(-\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(-\vec{v}\right)=-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$.

En particulier avec des points: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ ou encore
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=-\left(-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Identités remarquables.

Théorème:

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=2\left(\vec{u}^2+\vec{v}^2\right)$ (identité du parallélogramme).
Cette propriété tient son nom que l'on obtient ainsi que la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés du parallélogramme.

Preuve:

Il suffit d'utiliser la définition $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$.

Orthogonalité.

Définition:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Justification:
On n'a pas encore de définition rigoureuse ou pratique de l'orthogonalité dans l'espace: on manipule une notion intuitive.
On remarque facilement en utilisant des représentant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine, qu'alors le triangle formé vérifie la réciproque du théorème de Pythagore et donc que le triangle est rectangle donc la définition

prolonge la notion de perpendiculaire dans le plan.

Définitions:

◊ Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

◊ Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.
◊ Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Théorème:

◊ Un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

◊ Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Preuve:

Conséquences:

◊ Pour démontrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

◊ Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Application 1: Plan, vecteur normal et équation cartésienne de plan.

Théorème:

Tout plan admet au moins un vecteur normal et tout vecteur normal au plan est colinéaire à ce vecteur.

Il est dans un sens plus simple, même si cela reste fastidieux, de démontrer le lemme suivant:

Lemme:

(i) Pour tout couple $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\right)$ de vecteurs non colinéaires, il existe au moins un vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{a}$ et orthogonal à $\vec{b}$.

(ii) Un vecteur est orthogonal à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$ si et seulement s'il est colinéaire à $\vec{n}$.

(iii) Un vecteur est orthogonal à $\vec{n}$ si et seulement s'il est combinaison linéaire de $\vec{a}$ et de $\vec{b}$.

Preuve: Admise

Théorème: Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan orthogonal au vecteur $\vec{n}$ passant par A.

Preuve:

Corollaire 1:

Un plan est uniquement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur normal à ce plan.

Preuve: C'est une conséquence directe du théorème précédent.

Corollaire 2:

Tout plan admet une équation cartésienne de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, avec $(a;\ b;\ c) \neq (0;0;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Réciproquement, toute équation cartésienne de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, avec $(a;\ b;\ c) \neq (0;0;0)$ est l'équation d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Preuve:

• En écrivant $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ avec des coordonnées dans un repère de l'espace, on obtient:
$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ d'où $a\,x + b\,y + c\,z + (-a\,x_A - b\,y_A - c\,z_A) = 0$.
• Réciproquement:
Soit $M(x;y;z)$ vérifie $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.
Supposons par exemple $a \neq 0$. Alors le point $A\left(\frac{-d}{a};0;0\right)$ est un point de l'ensemble considéré.
On a $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = a\left(x - \left(-\frac{d}{a}\right)\right) + b\,y + c\,z = a\,x + b\,y + c\,z + d = -d + d = 0$ et donc l'ensemble considéré est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque:
Une équation cartésienne n'est pas unique.
Remarquons cependant que deux équations cartésiennes d'un même plan ont des coefficients proportionnels.

Conséquences:
• Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
• Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

ATTENTION: une droite de l'espace n'admet pas d'équations cartésiennes.

Application 2: Théorème de la médiane.

Théorème: Soit A et B deux points de l'espace et I le milieu de $[AB]$. On a alors:

• $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
• $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
• $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Preuve: en exercice

Application 3: caractérisation d'une sphère.

Théorème: Soit A et B deux points de l'espace.

La sphère $\mathcal{S}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Preuve: en exercice

Application 4: distance d'un point à un plan.

Théorème:

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\,;\ \vec{j}\,;\ \vec{k}\right)$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, a, b et c non tous nuls et M le point de coordonnées $(x_0\,;\,y_0;\,z_0)$.

On a alors avec $d(\mathcal{P}\,;M)$, la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$:

• $d(\mathcal{P}\,;\ M) = \dfrac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$, avec A point quelconque du plan P .

• $d(\mathcal{P}\,;\ M) = \dfrac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

On rappelle que la distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est la longueur HM où H est le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

C'est en effet la plus petite de toute les distances du point M à un point quelconque du plan $\mathcal{P}$. Il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore.
En effet $\forall\, P \in \mathcal{P},\ PM^2 = PH^2 + HM^2 \geq HM^2$.

Exercices :

Exercice 1:

L'espace E est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

Partie A (cette partie constitue une restitution organisée de connaissances)

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$.
Soit P le plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.
On considère le point I de coordonnées $(x_1; y_1; z_1)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance du point I au plan P est égale à $\dfrac{|a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

1. Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P.
Déterminer, en fonction de a, b, c, x_1, y_1 et z_1 un système d'équations paramétriques de Δ.

2. On note H le point d'intersection de Δ et P.

a. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\,\overrightarrow{n}$.

b. Déterminer l'expression de k en fonction de a, b, c, d, x_1, y_1 et z_1.

c. En déduire que $IH = \dfrac{|a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

Le plan Q d'équation $x - y + z - 11 = 0$ est tangent à la sphère S de centre le point Ω de coordonnées $(1; -1; 3)$
.

1. Déterminer le rayon de la sphère S.

2. Déterminer un système d'équaitons paramétriques de la droite Δ passant par Ω et orthogonale au plan Q.

3. En déduire les coordonnées du point d'intersection de la sphère S avec le plan Q.

Exercice 2:

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\,\overrightarrow{i},\,\overrightarrow{j},\,\overrightarrow{k}\right)$, on donne les points : $A(1; 2; 3)$,
$B(3; 0; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(2; 1; -1)$, $E(-1; -2; 3)$ et $F(-2; -3; 4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\overrightarrow{n}(0; 1; -1)$ est une vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 3:

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée en annexe page .... (à rendre avec la copie). Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AK}\right)$.

1. a. Montrer que IE $= \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I , E et F.

   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment $[D F]$ et N celui du segment $[A B]$.

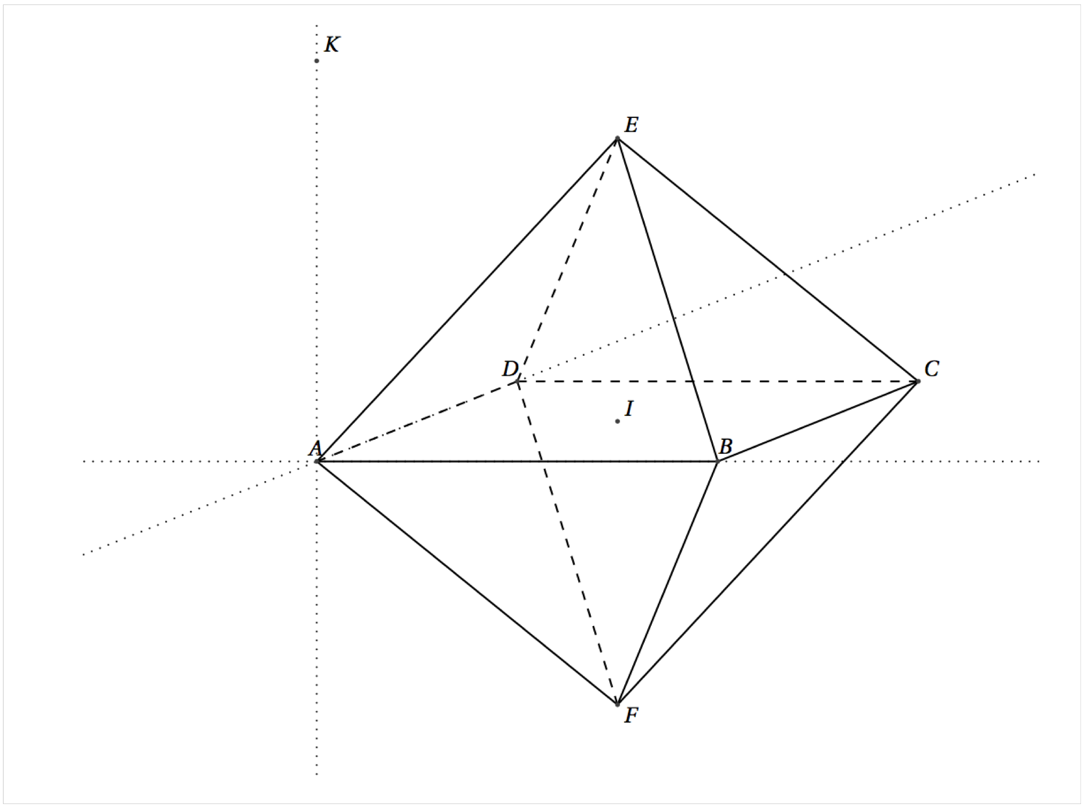
   a. Démontrer que les plans $(F D C)$ et $(A B E)$ sont parallèles.

   b. Déterminer l'intersection des plans $(E M N)$ et $(F D C)$.

   c. Construire sur l'annexe page ... (à rendre avec la copie) la section du solide $A D E C B F$ par le plan $(E M N)$.

Annexes :

EXERCICE 1



Exercice 4

A. Vrai-Faux.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :
• $P_1 \cap P_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans P_1 et P_2.
• L 'écriture $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ signifie que les plans P_1 et P_2 n'ont aucun point commun.

1. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$ alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient : $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$.

2. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$ alors on peut conclure que P_1, P_2 et P_3 sont tels que : $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$

3. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_1 \cap P_3 = \emptyset$ alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient : $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$.

4). Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant : $P_1 \cap D \neq \emptyset$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ alors on peut conclure que $P_2 \cap D \neq \emptyset$.

B. Intersection de trois plans donnés.

Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considère les trois plans suivants :
• P_1 d'équation $x + y - z = 0$,
• P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
• P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.

2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Exercice 5:

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives: $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

2. Soit λ un nombre réel.
On considère le plan $\mathcal{P}_\lambda$ d'équation $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda\,;\ 1 + 2\lambda\,;\ 1)$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}_\lambda$.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_\lambda$ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$, intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{-1}$.
Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.

5. ***Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***
On considère le point $A(1; 1; 1)$. Déterminer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$, c'est à dire la distance entre

le point A et son projeté orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$ et $C(2; 2; 2)$.

1.a. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $(A\,B\,C)$.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan $(A\,B\,C)$.

2. Soit P le plan d'équation $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans $(A\,B\,C)$ et P sont sécants.

b. Soit D la droite d'intersection des plans P et $(A\,B\,C)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3; 1; 3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2; -1; 1)$.

On admet que la droite D a pour représentation paramétrique: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.

a. Montrer que le point I appartient à la droite D.

b. Montrer que le point I appartient à la pshère S.

c. ***Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.***

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.