Calcul intégral

Aire sous une courbe, Primitives, Théorème fondamental de l'analyse.

1. Intégrale d'une fonction positive

Définition:

On munit le plan d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$. Une unité d'aire, notée **u.a.**, est définie par l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

L'unité d'aire dépend donc du repère choisi. Ainsi pour un repère d'unité 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées, on a $1\ u.a. = 2\ \text{cm}^2$.

Définition:

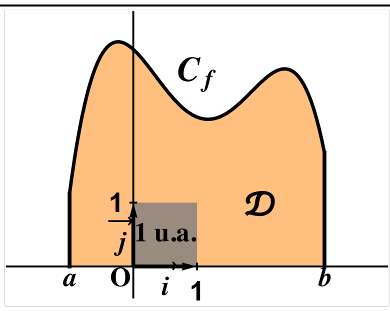
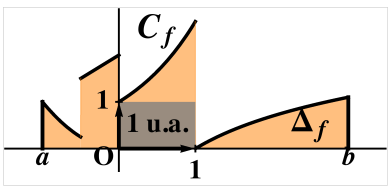
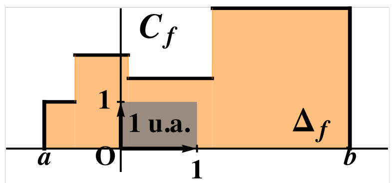
Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit f une fonction définie sur $[a; b]$.
L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ ou encore intégrale de a à b de la fonction f, est le nombre réel positif noté $\displaystyle\int_{[a;b]} f(t)\, dt$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ égal à l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan compris entre la courbe représentative de la fonction f sur $[a; b]$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, c'est à dire $\mathcal{D} = \{M(x; y) \in \mathcal{P}\ ;\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$.

On a par convention $\displaystyle\int_a^a f(t)\, dt = 0$.

La notation $\displaystyle\int_a^b d$ se lit "intégrale de a à b" et parfois aussi "somme de a à b"
La lettre t désigné par le dt est une lettre muette: elle est interne à la notation. Elle indique la variable d'intégration.
Ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(u)\, du = \ldots$
Mais $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \neq \int_a^b f(t)\, dx$: dans le deuxième cas, $f(t)$ est une **constante** !

A priori, il n'y a pas de contraintes particulières sur la fonction f. Néanmoins plus la fonction est régulière (par exemple continue ou constante par morceaux) plus cela semble aisé à gérer.
Les fonctions affines par morceaux, en particulier constantes par morceaux jouent un rôle prépondérant dans les preuves de l'existence et de la pertinence des intégrales et du théorème fondamental dans le cas général.
On peut observer que l'intégrale d'une fonction qui ne serait ne pas être définie en quelques points, en fait une infinité dénombrable, reste définie. L'épaisseur d'une ligne ou de quelques lignes "ne compte pas" dans le calcul de l'aire.

- Illustration:

fonction continue sur $[a;b]$	fonction discontinue sur $[a;b]$	fonction constante par morceaux sur $[a;b]$
		

■ Exemples:

⋆ avec une fonction constante positive: $\int_{-1}^{5} 3\, dt = 3 \times (5-(-1)) = 18\ u.a.$ c'est l'aire d'un rectangle de hauteur 3 et de longueur le diamètre de l'intervalle $[-1; 5]$.

⋆ avec une fonction affine sur un intervalle convenable: on a besoin pour l'instant d'une fonction positive.

- $\int_{1}^{3} x - 1\, dx = \dfrac{2 \times (3-1)}{2} = 2\ u.a.$: aire d'un triangle rectangle
- $\int_{-2}^{0} -2x + 1\, dx = \dfrac{(5+1)(0-(-2))}{2} = 6\ u.a.$: aire d'un trapèze

⋆ un cas particulier: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\ du = \dfrac{\pi}{2}\ u.a.$: aire d'un demi-cercle de centre l'origine et de rayon 1(son équation est $x^2 + y^2 = 1$ donc $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ avec $x \in [-1; 1]$.

On sait donc calculer des intégrales indépendamment des expressions des fonctions.
On peut d'ors et déjà remarquer que pour des fonctions positives, des considérations simples sur les aires permettent de deviner des propriétés telles que:

- $\int_a^b 2 f(t)\, dt = 2 \int_a^b f(t)\, dt$ et plus généralement pour $k \geq 0$, $\int_a^b k f(t)\, dt = k \int_a^b f(t)\, dt$
- $\int_a^b f(t) + g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$ (linéarité)
- $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$ (Chasles)

2. Méthodes

2.1. Méthode discrète: les sommes de Riemann (1826-1866)

Les sommes de Riemann (1826-1866) sont à rapprocher de méthodes anciennes:

⋆ le principe d'***exhaustion***, utilisé par ***Eudoxe*** (370 BC) ou ***Archimède*** (3rd BC) pour le périmètre du cercle et l'aire du disque, ***Liu Hui*** (Chine, 3rd AD, Commentaires sur “Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique” (九章算術 ou 九章算术 ou Jiǔzhāng Suànshù))

⋆ le principe des ***indivisibles*** développé par Cavalieri (Italie, 17ème siècle).

On parle aussi de la méthode des rectangles. Remarquons que l'on peut adapter le principe des rectangles à des trapèzes. On parle alors de la méthode des trapèzes.

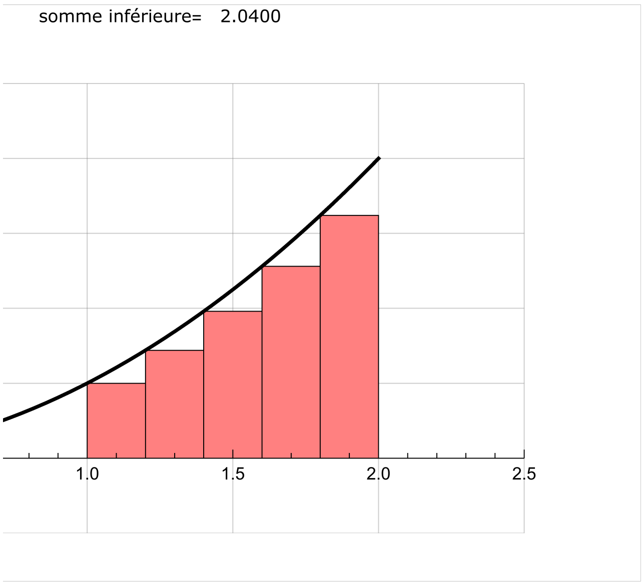
■ Objectif

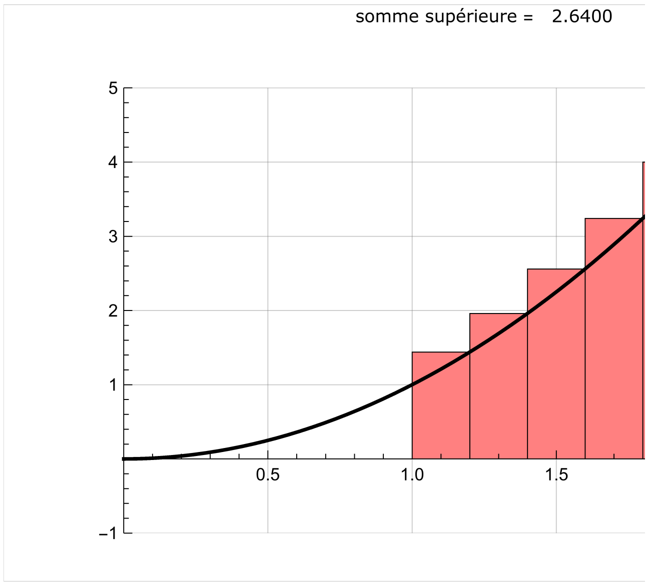
On se propose de calculer l'aire sous la courbe de $x \longmapsto x^2$ pour $x \in [a; b]$ où a et b sont deux réels tels que $0 \leq a < b$. notons alors que $b - a > 0$.

■ Principe et construction

On construit, pour tout entier $n \geq 1$, au-dessous et au-dessus de la courbe de la fonction (ici la fonction carrée) n rectangles:

- de largeur $\dfrac{b-a}{n}$: on a subdivisé l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles disjoints de bornes $a + k\dfrac{b-a}{n}$ et $a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}$ pour tout entier $0 \leq k \leq n-1$.
- de hauteur:
  - $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ pour les rectangles au-dessous et pour la fonction carrée
  - $f\left(a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right)$ pour les rectangles au-dessus et pour la fonction carrée.





On construit ainsi deux suites (S_n) et (S_n') qui vérifient:

• $S_n \le \int_a^b f(t)\,dt \le S_n'$: sur chaque intervalle l'aire sous la courbe est encadrée par le $k^{\text{ème}}$ rectangle sous la courbe et le $k^{\text{ème}}$ rectangle au dessus de la courbe. On utilise alors que $\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\frac{(b-a)}{n}}^{(k+1)\frac{(b-a)}{n}} f(t)\,dt$.

• (S_n) est croissante et (S_n') est décroissante: c'est facile à voir quand on divise les intervalles par 2 par exemple. Néanmoins la preuve est plus compliquée dans la mesure où les intervalles considérés n'ont pas toujours les mêmes bornes (voir avec entre $n = 2$, 3 puis 4 ou 5 par exemple).

• $\lim_{n\to+\infty} S_n' - S_n = 0$: il suffit de voir que la différence entre les deux sommes est $(f(b) - f(a))\,\dfrac{(b-a)}{n}$, c'est à dire la différence d'aire entre le premier des rectangles sous la courbe et le dernier des rectangles au-dessus. Tous les autres sont communs aux deux sommes.

On dit alors que les suites sont ***adjacentes***. On montre dans ces conditions (théorème équivalent au théorème de convergence monotone) que les 2 suites convergent vers la ***même limite***, qui d'après les théorèmes de comparaison n'est autre que $\int_a^b f(t)\,dt$.

On peut appliquer le principe ci-dessus à toutes fonctions partout définies sur un intervalle $[a; b]$. Les résultats sur les suites (S_n) et (S_n') restent vraies.

Remarquons que $\int_a^b f(t)\,dt = \int_0^b f(t)\,dt - \int_0^a f(t)\,dt$.

Ainsi il suffit de déterminer pour tout réel $a > 0$, $\int_0^a f(t)\,dt$.

▪ Expressions des sommes

Pour tout entier naturel $n > 0$, on exprime les sommes de Riemann sur l'intervalle $[0; a]$, subdivisé en n intervalles de longueur $\dfrac{a}{n}$:

$$\left[0 + 0\times\frac{a}{n}; 0 + 1\times\frac{a}{n}\right] \cup \left[0 + 1\times\frac{a}{n}; 0 + 2\times\frac{a}{n}\right] \cup \ldots \cup \left[0 + k\times\frac{a}{n}; 0 + (k+1)\,\frac{a}{n}\right] \cup \ldots \cup \left[0 + (n-1)\times\frac{a}{n}; 0 + n\times\frac{a}{n} = a\right].$$

• $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(0 + k\,\frac{a}{n}\right)\times\frac{a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{n}\right)^3 \times k^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$

• $S_n' = \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + k\,\frac{a}{n}\right)\times\frac{a}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)^3 \times k^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n} k^2$

Or on sait que pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On en déduit, $S_n = \dfrac{a^3}{6} \times \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{n^3}$ et $S_n{}' = \dfrac{a^3}{6} \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}$.

- Calcul de leur limites et conclusion

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(2-\dfrac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right) = 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n{}' = \dfrac{a^3}{3}\ u.a.$

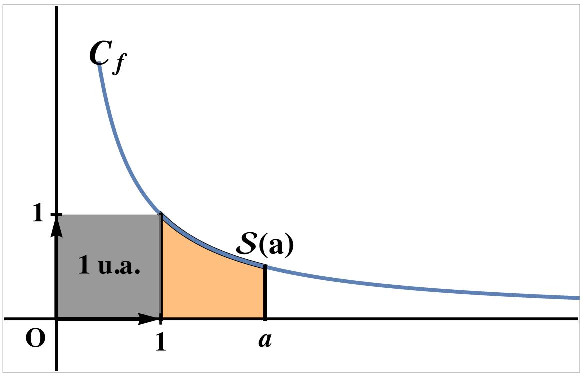
Par suite $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt = \frac{a^3}{3}$ et ainsi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\ u.a.$

2.2. Méthode analytique: la quadrature de l'hyperbole.

Note historique:
La quadrature d'une surface, à l'origine, est la recherche d'un carré ayant la même aire qu'une surface donnée. Il s'agissait tout d'abord de pouvoir construire le carré en question à la règle et au compas.
La quadrature la plus célèbre est la quadrature du cercle qui se révéla impossible à la règle et au compas. Plus tard quadrature prit le sens de calcul d'aire.

- Objectif:

Il s'agit ici de déterminer l'aire du domaine du plan compris entre l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ avec $a \geq 1$.



Pour tout réel $a \geq 1$, on pose $\mathcal{S}(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{1}{t}\,dt$.

Pour tout réel $a \geq 1$, $\mathcal{S}(a)$ existe (id est "$\in \mathbb{R}$") puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est **positive** et **continue** et **majorée** sur $[1; +\infty[$: $\forall\, a \geq 1,\ 0 \leq \mathcal{S}(a) \leq a$.

Démontrons que la fonction F est dérivable pour tout réel $x \geq 1$.

- Étape 1: nombre dérivé à droite

Soit a_0 un réel de $[1; +\infty[$ fixé.
Soit a un réel de $[1; +\infty[$ tel que $a_0 \leq a$.

L'aire du domaine du plan compris entre l'hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = a_0$ est donnée par $\mathcal{S}(a) - \mathcal{S}(a_0)$

Alors comme la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$, on sait que pour tout réel $t \in [a_0, a]$, $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{a_0}$.
Ainsi le domaine du plan compris entre l'hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = a_0$ est

contenu dans le rectangle de sommets $\left\{(a_0;0);\left(a_0;\frac{1}{a_0}\right);\left(b_0;\frac{1}{a_0}\right);(b_0;0)\right\}$ et contient le rectangle de sommets $\left\{(a_0;0);\left(a_0;\frac{1}{a}\right);\left(b_0;\frac{1}{a}\right);(b_0;0)\right\}$.

Par suite $\frac{a-a_0}{a}\leq \mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)\leq \frac{a-a_0}{a_0}$ et donc comme $a-a_0>0$, $\frac{1}{a}\leq \frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}\leq \frac{1}{a_0}$ pour tout $a\neq a_0$.

Finalement $\lim\limits_{a\to a_0^+}\frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}=\frac{1}{a_0}$.

- ## Étape 2: nombre dérivé à gauche

Soit a_0 un réel de $]1;+\infty[$ fixé.
Soit a un réel de $]1;+\infty[$ tel que $a\leq a_0$.

L'aire du domaine du plan compris entre l'hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=a_0$ est donnée par $\mathcal{S}(a_0)-\mathcal{S}(a)$

Alors, comme la fonction $x\longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, on sait que pour tout réel $t\in[a_0,a]$, $\frac{1}{a_0}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{a}$.
Ainsi le domaine du plan compris entre l'hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=a_0$ est contenu dans le rectangle de sommets $\left\{(a_0;0);\left(a_0;\frac{1}{a}\right);\left(b_0;\frac{1}{a}\right);(b_0;0)\right\}$ et contient le rectangle de sommets $\left\{(a_0;0);\left(a_0;\frac{1}{a_0}\right);\left(b_0;\frac{1}{a_0}\right);(b_0;0)\right\}$.

Par suite $\frac{a_0-a}{a_0}\leq \mathcal{S}(a_0)-\mathcal{S}(a)\leq \frac{a_0-a}{a}$ et donc comme $a_0-a>0$, $\frac{1}{a_0}\leq \frac{\mathcal{S}(a_0)-\mathcal{S}(a)}{a_0-a}\leq \frac{1}{a}$ pour tout $a\neq a_0$.

Remarquons finalement que $\frac{\mathcal{S}(a_0)-\mathcal{S}(a)}{a_0-a}=\frac{-(\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0))}{-(a-a_0)}=\frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}$.

Finalement $\lim\limits_{a\to a_0^-}\frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}=\frac{1}{a_0}$.

- ## Étape 3: conclusion

On a montré que pour tout réel $a_0>1$, $\lim\limits_{a\to a_0^+}\frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}=\lim\limits_{a\to a_0^-}\frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}=\frac{1}{a_0}$ donc $\lim\limits_{a\to a_0}\frac{\mathcal{S}(a)-\mathcal{S}(a_0)}{a-a_0}=\frac{1}{a_0}\in\mathbb{R}$: la fonction $\mathcal{S}$ est dérivable en a_0 et $\mathcal{S}'(a_0)=\frac{1}{a_0}$.

On a aussi démontré que S est dérivable à droite de 1. Ainsi S est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout réel $x\geq 1$, $S'(x)=\frac{1}{x}$.

Par conséquent la fonction φ définie par $\varphi(x)=\mathcal{S}(x)-\ln(x)$ est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout réel $x\geq 1$, $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$ donc φ constante égale à $\varphi(1)=\mathcal{S}(1)-\ln(1)=0$.

Finalement, pour tout réel $x\geq 1$, $\mathcal{S}(x)=\ln(x)$.

Par conséquent la fonction $\mathcal{S}: x\longmapsto \mathcal{S}(x)=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt$ est la fonction dérivable qui s'annule en 1, dont la dérivée est $x\longmapsto\frac{1}{x}$.

3. Théorème fondamental de l'analyse

3.1. Théorème (Newton (1642-1726/7) / Leibniz (1646-1716))

Théorème:

Soit f une fonction définie continue et positive sur I.
La fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Preuve: le résultat est admis dans le cas général.
Dans le cas d'une fonction strictement monotone, on procède comme pour la fonction inverse, en adaptant suivant que la fonction est croissante ou décroissante.

- Exemples:

• On a vu que pour tout $x \geq 1$, $F : x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ est telle que $F'(x) = \frac{1}{x}$.

• La fonction $F : x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = e^{-x^2}$.

3.2. Notion de primitives

Définition:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall\, x \in I$, $F'(x) = f(x)$ est appelée **une primitive** de f sur I.

Exemples:

• Une primitive de $x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \frac{1}{3}x^3$ puisque $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3}\times 3\,x^2 = x^2$.

• Une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $]\,0; +\infty[$ est $x \longmapsto \ln(x)$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur I admettant la fonction F pour primitive. Alors f admet une infinité de primitive, les fonctions de la forme $x \longmapsto F(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Preuve:

Il est clair que toute fonction de la forme $x \longmapsto F(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$ est une primitive de f puisque $(F(x) + K)' = F'(x) + 0 = f(x)$.

Réciproquement, en notant G une autre primitive de f sur I.
Alors la fonction $G - F$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $(G - F)'\,(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Par suite la fonction $G - F$ est constante sur I: il existe donc une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x \in I$, $G(x) - F(x) = K$ d'où $G(x) = F(x) + K$.

On peut noter que:
• si on connaît une primitive, on les connaît toutes.
• le nombre K est défini par une **"condition initiale"**, $y_0 = F(x_0)$ avec $x_0 \in I$.
Cette condition initiale donne l'unicité de la primitive.
Par exemple ln est l'**unique** primitive de la fonction inverse sur $]\,0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

3.3. Conséquences

Théorème:

Soit f une fonction définie continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I.

Pour tous réels a et b de I , $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

On a montré que $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f donc il existe un réel K tel que $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + K$.

Alors comme $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$, on obtient, $0 = F(a) + K$ d'où $K = -F(a)$ et donc $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$.

Finalement, pour $x = b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Note: On note $F(x)\Big]_a^b$ pour la différence entre les images $F(b)$ et $F(a)$. C'est juste une notation.

Théorème:

Toute fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une infinité de primitive sur I.

Une fonction continue sur I admet pour $a \in I$, $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ comme primitive qui s'annule en a, et donc admet les fonctions $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + K,\ K \in \mathbb{R}$ comme primitives sur I.

Pour le calcul de primitives, voir le paragraphe ?? .

4. Généralisation de la notion d'intégrale

4.1. Introduction

On veut donc prolonger la notion observée précédemment au cas d'une fonction quelconque.
On remarque que

• du point de vue du calcul d'aire, il suffit de considérer le calcul de l'aire sous la fonction positive $|f|$: le calcul d'aire n'est plus un problème!

• en appliquant le résultat précédent à $f(x) = x$, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,dx = \left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big]_{-1}^1 = 0$.

Alors ou le résultat précédent ne se prolonge pas à une fonction quelconque, ou la notion d'aire n'est pas respectée.

Les définitions qui suivent sont les résultats des travaux qui permettent de donner une cohérence à l'ensemble des résultats observés précédemment.

On a été amené à considérer une “aire orientée” par les axes du repère.

4.2. Cas d'une fonction négative

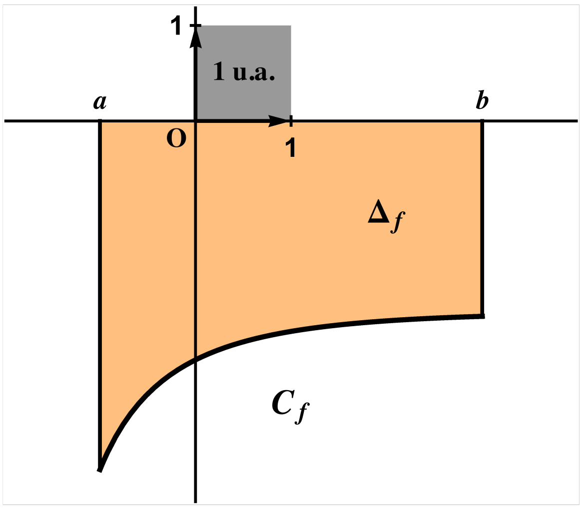
Définition (pour une fonction négative)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a \le b$ et telle que $f(x) \le 0$ pour tout réel $x \in [a; b]$.
Soit alors $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire du domaine Δ_f du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\mathcal{A}$.

L'intégrale ainsi définie peut-être vue comme une “aire négative”, une aire orientée par les axes du repère.

- Illustration:



Par définition, $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'opposé de l'aire du domaine Δ_f

■ Exemple:

- $\int_{-1}^{1} -x-1\,dx = -\frac{2\times 2}{2} = -2$: l'opposé de l'aire d'un triangle rectangle.

4.3. Cas d'une fonction quelconque

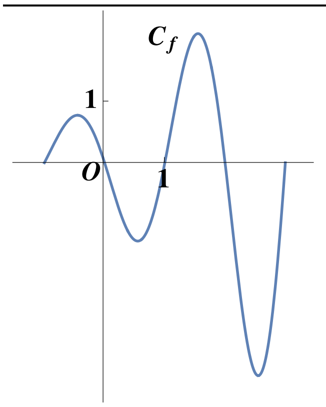
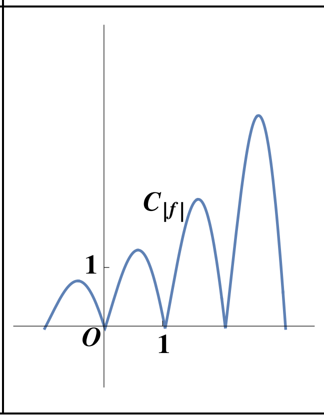
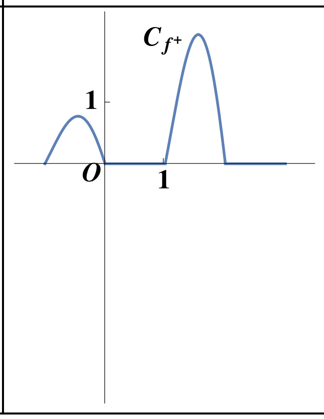
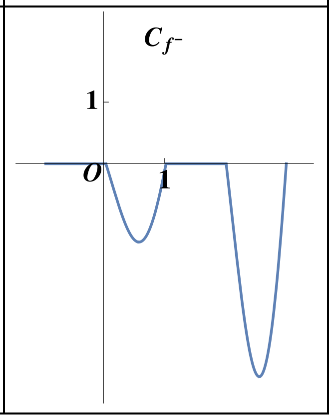
Définition (pour une fonction quelconque)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a \leq b$. On définit $f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$ et $f^{-}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } f(x) \geq 0 \\ f(x) \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$.

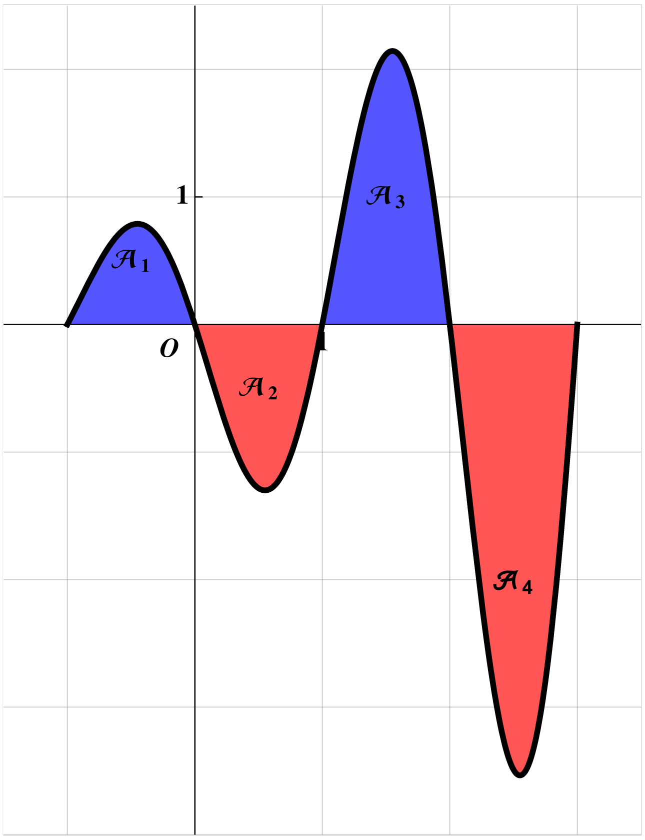
Alors $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f^{+}(x)\,dx + \int_a^b f^{-}(t)\,dt$.

■ Illustration:

Ci-dessous, pour une fonction f donnée continue sur $[-1;3]$, la courbe de la fonction f, celle de $|f|$, celle de f^{+} et celle de f^{-}.

f	$\lvert f\rvert$	f^{+}	f^{-}
			

Pour calculer, $\int_{1}^{3} f(t)\,dt$, on partage le domaine $\Delta_f = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \text{ ou } f(x) \leq y \leq 0\}$ en autant de domaines que nécessaires correspondant aux intervalles sur lesquels f est positive ou négative.



On obtient $\int_{-1}^{3} f(t)\,dt = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4$.

⚠ **Dans le cas général, l'intégrale n'est plus égale à l'aire du domaine du plan compris entre la courbe et l'axe des abscisses.**

- Exemples:

• $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ (par symétrie par rapport à l'origine du repère.

Il en va de même pour toute fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$: $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$, $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.

On rappelle qu'une fonction impaire est une fonction telle que si $x \in \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

• $\int_{-1}^{2} |x| - 1\,dx = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

4.4. Bornes

Définition:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors $\int_{b}^{a} f(t)\,dt = -\int_{a}^{b} f(t)\,dt$

Il s'agit d'une **définition**. La cohérence de ce choix est liée à la cohérence avec les propriétés de l'intégrale.

Commentaire: on retrouve la notion d'orientation. Si $a \leq b$, on parcourt l'axe des abscisses “dans le bon sens”, par contre si $a \geq b$, on parcourt l'axe des abscisses “dans le mauvais sens”, le dt est compté négativement.

5. Propriétés

5.1. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème:

Soit f une fonction définie continue sur sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Le cas des fonctions positives se généralise. Remarquons que l'on a aussi bien $x \geq a$ que $x \leq a$ tant que $x \in I$.

Corollaire:

Toute fonction définie continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une infinité de primitives sur I.

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I.
Pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(t)\,dt = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Le cas des fonctions positives se généralise. Remarquons que l'on a aussi bien $x \geq a$ que $x \leq a$ tant que $x \in I$.

5.2. Linéarité

Théorème:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Alors pour tous réels α et β,
$\int_a^b \alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.
En particulier, $\int_a^b -f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

C'est un résultat fondamental. Il assure qu'il suffit de connaître les intégrales de fonctions de référence pour pouvoir calculer un grand nombre d'intégrales.

- Preuve: Admis.
- Exemple

• $\int_{-1}^3 2\,x^2 - \frac{1}{2}x + 3\,dx = 2\int_{-1}^2 x^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^3 x\,dx + 3\int_{-1}^3 1\,dx$

• $\int_1^5 \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}\,dt = 2\int_1^5 \frac{1}{t}\,dt - 3\int_1^5 \frac{1}{t^2}\,dt$

5.3. Positivité

Propriété (positivité de l'intégrale)

Soit f une fonction positive sur $[a; b]$ avec $a < b$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Longleftrightarrow f(t) = 0$ pour tout réel $t \in [a; b]$.

Preuve: Si $f(t) = 0$, on a clairement $\int_a^b f(t)\,dt = 0$. Réciproquement, la fonction f est **positive** donc $\int_a^b f(t)\,dt$ est une "**vraie**" aire donc cette aire est nulle si f est nulle.

⚠ cette propriété est fausse si la fonction f n'est pas positive. Ainsi $\int_{-1}^1 t\,dt = 0$ et pourtant $t \longmapsto t$ n'est pas nulle sur $[-1; 1]$.

Théorème:

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ avec $a < b$. Alors si pour tout réel $t \in [a; b]$, $f(t) \leq g(t)$, $\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$.

Preuve: Il suffit d'utiliser la positivité et la linéarité appliquées à la fonction $\phi = g - f$.

Corollaire:

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$. Alors $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$.

Preuve: immédiat d'après le théorème précédent.

Théorème (inégalité de la moyenne):

• Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$. Alors s'il existe des réels m et M tels que pour tout réel $t \in [a; b]$, $m \leq f(t) \leq M$, $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$.

• Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ avec $a < b$. Alors s'il existe un réel M tels que pour tout réel $t \in [a; b]$, $|f(t)| \leq M$, $\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leq M(b-a)$.

Preuve: Il suffit d'utiliser le théorème précédent appliqué aux fonctions $t \longmapsto m$, $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto M$et de remarquer que $\int_a^b m\, dt = m(b-a)$ et $\int_a^b M\, dt = M(b-a)$.

5.4. Relation de Chasles

Propriété:

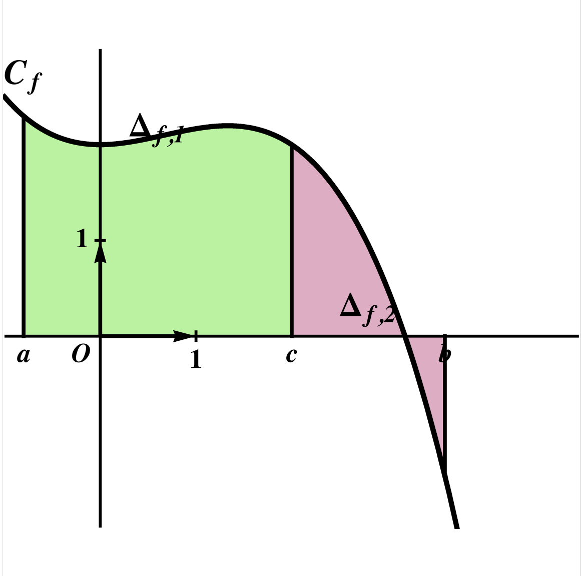
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors pour tous réels a, b et c de l'intervalle I, $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$.

On peut ainsi découper le calcul d'intégrales en autant de morceaux que nécessaire. Ce sera en particulier utile en probabilités.

- Preuve:

Le résultat est facile à voir dans le cas des fonctions positives et pour $c \in [a; b]$. Il s'agit alors juste d'une somme d'aires.
Pour les autres cas, la preuve est similaire. Il faut néanmoins faire attention aux signes. La preuve n'est pas difficile, mais laborieuse. Il faut raisonner en distinguant les différentes possibilités: $a \leq b \leq c$, $c \leq a \leq b$, …

- Illustration:



■ Exemples:

- $\int_0^2 E(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx = 1$
- $\int_0^2 |x-1|\,dx = \int_0^1 -x+1\,dx + \int_1^2 x-1\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$

6. Applications

6.1. Calculs d'aires

Propriété:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, $a \leq b$.
Alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative C de f et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donnée par $\int_a^b |f(t)|\,dt$.

Commentaires: Le résultat est clair. D'un point de vue graphique, la courbe de $|f|$ est celle de f partout où f est positive et son symétrique par rapport à l'axe des abscisses, partout où elle est négative.

Calculer l'aire demande donc de déterminer à l'avance les intervalles sur lesquels la fonction est positive et les intervalles sur lesquels la fonction est négative.

■ ***Exemple:***

On a $\int_{-1}^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ alors que l'aire du domaine compris entre la courbe de $t \longmapsto t$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=2$ est donnée par
$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 |t|\,dt = \int_{-1}^0 -t\,dt + \int_0^2 t\,dt = \left[-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}\,u.a.$

Propriété:

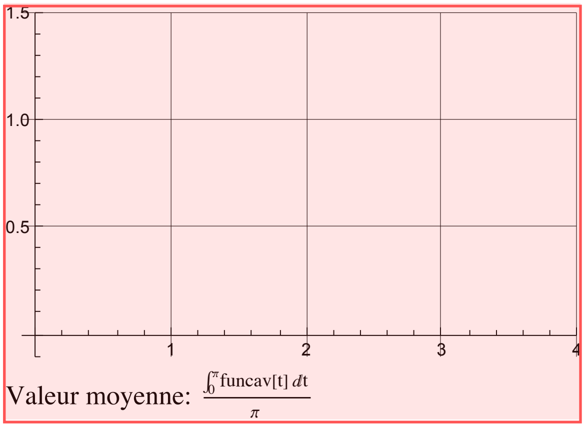
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$, $a \leq b$.
Alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ du plan compris entre les courbes représentatives de f et de g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donnée par $\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt$.

Commentaires: Identiquement au cas précédent, il faut décider sur quels intervalles la fonction f est supérieure à g et sur quels intervalles f est inférieure à g.

6.2. Valeur moyenne

Définition:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$. On appelle **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$, le nombre réel $\mu_{[a;b]} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$.



Commentaire: le nombre $\mu_{[a;b]}$ correspond à la valeur de la fonction constante qui sur $[a; b]$ a la même intégrale que f.
On retrouve bien l'idée de la moyenne.
Ici le correspondant de l'effectif total dans le cas continu est le diamètre de l'intervalle $[a; b]$.

7. Calcul de primitives

On sait mal en quelque sorte calculer des primitives. On procède plutôt par reconnaissance de formules de dérivées.

7.1. Primitives usuelles

Fonctions	Primitives
$x \mapsto 0$	$x \mapsto K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto a$; $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{2}ax^2 + bx + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$; $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$; $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$	$x \mapsto -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x \in \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + K$, $K \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \exp(x) = e^x$	$x \mapsto \exp(x) + K = e^x + K$, $K \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}^{+*}$	$x \mapsto \ln(x) + K$, $K \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R}^*$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + K$, $K \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^*$

7.2. Autres formules

Somme:

Si $f = u' + v'$ alors une primitive de f est $F = u + v$

Une primitive de $x \longmapsto x + \frac{1}{x}, x > 0$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 + \ln(x)$.

Produit par une constante réelle:

Si $f = k\,u'$ alors une primitive de f est $F = k\,u$

Composée:

Si $f = u' \times v'(u)$ alors une primitive de f est $F = v \circ u$.

Les cas ci-dessous sont des cas particuliers de la composition, qu'il vaut mieux néanmoins repérer au premier coup d'œil.

Si $f = u'\,u^n$ alors une primitive de f est $F = \frac{1}{n+1}\,u^{n+1}$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto (x+1)\left(x^2+2\,x+5\right)^4$ est $F : x \longmapsto \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\left(x^2+2\,x+5\right)^5 = \frac{1}{10}\left(x^2+2\,x+5\right)^5$ puisque $\left(x^2+2\,x+5\right)' = 2\,x+2 = 2\,(x+1)$ et donc $(x+1)\left(x^2+2\,x+5\right)^4 = \frac{1}{2}(2\,x+2)\left(x^2+2\,x+5\right)^4 = \frac{1}{2}\,u'\,u^4$

Si $f = \frac{u'}{u^n}$, $n \geq 2$ alors une primitive de f est $F = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{u^{n-1}}$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)}{\left(2+\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)\right)^3}$ est $F : x \longmapsto -3 \times \left(-\frac{1}{2} \times \dfrac{1}{\left(2+\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)\right)^2}\right) = -\dfrac{3}{2\left(2+\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)\right)^2}$

puisque $f = -3 \times \frac{u'}{u^3}$ avec $u = 2 + \cos\left(\frac{x}{3}+1\right)$ et $u' = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)$

Si $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$ alors une primitive de f est $F = 2\sqrt{u}$

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est $F : x \longmapsto \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

Si $f = u' \cos(u)$ (resp $u' \sin(u)$) alors une primitive de f est $F = \sin(u)$ (resp $F = -\cos(u)$)

Une primitive de $x \longmapsto \cos\left(2\,x+\frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}\sin\left(2\,x+\frac{\pi}{3}\right)$. En effet ici on lit $\cos\left(2\,x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \times 2 \times \cos\left(2\,x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\,u'\cos(u)$ avec $u = 2\,x + \frac{\pi}{3}$.

Si $f = u' \exp(u) = u'\,e^u$ alors une primitive de f est $F = \exp(u) = e^u$

Une primitive de $x \longmapsto x\,e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \longmapsto -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}$

Si $f = \dfrac{u'}{u}$ avec u strictement positive sur I alors une primitive de f est $F = \ln(u)$.

Note: $\dfrac{u'}{u}$ s'appelle la dérivée logarithmique.

Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ est $x \longmapsto \ln(e^x + 1)$.

Si $f = \dfrac{u'}{u}$ avec u non nulle sur I alors une primitive de f est $F = \ln(|u|)$.

Une primitive sur $\mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$ de $x \longmapsto -\dfrac{3\,x}{x^2 - 1}$ est $x \longmapsto -\dfrac{3}{2}\ln\left(\left|x^2 - 1\right|\right)$.

Remarquons que la valeur absolue ne résout rien en soi. Il faudra pour l'étude détailler les cas.
On préfère travailler les primitives et les intégrales sur des intervalles, pas sur des réunions d'intervalles.

8. Compléments (Hors programme)

9.1. Intégrale généralisée, intégrale indéfinie, intégrale impropre

Intégrale indéfinie

On appelle parfois intégrale indéfinie la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ dans les bonnes conditions.

On sait que cette fonction est la primitive de f qui s'annule en a.

Par extension, on note souvent $\int f(t)\,dt$ une primitive de f.

Intégrale impropre ou généralisée

On appelle ainsi des intégrales qui correspondent en fait à des limites d'intégrales.

Par exemple, on utilise en probabilités, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 1$ pour signifier que

$\lim\limits_{y\to+\infty} \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 1$.

Se pose alors le problème de la convergence, donc de l'existence de ces intégrales.

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = +\infty \notin \mathbb{R}$, alors que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$.

C'est néanmoins un aspect fondamental des intégrales qui permet entre autres d'étudier les séries, c'est à dire les sommes de la forme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n$ où (u_n) est une suite.

Les 2 domaines sont intimement liés.

9.2. IPP

L'Intégration Par Parties est une méthode pour "intégrer un produit". Elle est classique et fort utile.

On retourne la formule $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ en $u'\,v = (u\,v)' - u\,v'$ puis en $\int u'\,v\,dt = u\,v\big] - \int u\,v'\,dt$. On obtient:

Théorème:

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ telles que leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[a;b]$.
Alors $\int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt$.

Exemple

Soit a un réel strictement positif.

$\int_1^a \ln(x)\,dx = \int_1^a 1\times\ln(x)\,dx = \int_1^a u'(x)\,v(x)\,dx$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$.

Alors, d'après la formule d'intégration par parties, $\int_1^a \ln(x)\,dx = x\ln(x)\Big]_1^a - \int_1^a x\times\frac{1}{x}\,dx = x\ln(x)\Big]_1^a - \int_1^a 1\,dx$

Finalement comme $\int_1^a 1\,dx = x\big]_1^a = a-1$, $\int_1^a \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x\Big]_1^a = a\ln(a) - a - 1$.

On a obtenu qu'une primitive de $x \longmapsto \ln(x)$ est $x \longmapsto x\ln(x) - x$

Exemple:

Soient les deux intégrales définies par $I = \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx$.

a. Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + e^\pi + 1$.

b. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

- Exemple: double IPP

Soit a un réel. On pose $I(a)=\int_0^a x^2\, e^{-x}\, dx$.

On a $I(a)=\int_0^a x^2\, e^{-x}\, dx=\int_0^a u'(x)\, v(x)\, dx$ avec $\begin{cases} u'(x)=e^{-x} \\ v(x)=x^2 \end{cases}$. On obtient alors $\begin{cases} u(x)=-e^{-x} \\ v'(x)=2\,x \end{cases}$.

La formule d'intégration par parties donne alors:

$I(a)=\left[-x^2\, e^{-x}\right]_0^a-\int_0^a 2\,x\times\left(-e^{-x}\right) dx$ d'où $I(a)=-a^2\, e^{-a}+2\int_0^a x\, e^{-x}\, dx$.

Calculons $\int_0^a x\, e^{-x}\, dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

On pose $\begin{cases} u'(x)=e^{-x} \\ v(x)=x \end{cases}$, d'où $\begin{cases} u(x)=-e^{-x} \\ v'(x)=1 \end{cases}$ et on obtient $\int_0^a x\, e^{-x}\, dx=\left[-x\, e^{-x}\right]_0^a-\int_0^a 1\times\left(-e^{-x}\right) dx$ d'où

$\int_0^a x\, e^{-x}\, dx=-a\, e^{-a}+\int_0^a e^{-x}\, dx$.

Or $\int_0^a e^{-x}\, dx=\left[-e^{-x}\right]_0^a=-e^{-a}-\left(-e^{-0}\right)=1-e^{-a}$.

Finalement $\int_0^a x\, e^{-x}\, dx=1-e^{-a}-a\, e^{-a}$ et ainsi $I(a)=-a^2\, e^{-a}+2\left(1-e^{-a}-a\, e^{-a}\right)$ et donc $I(a)=2-2\, e^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right)$.

9.3. Changements de variables

C'est une technique extrêmement efficace et qui dans certains cas est difficile à contourner. Elle est néanmoins difficile à utiliser et demande des précautions.

Le résultat découle de la formule de dérivation d'une fonction composée: $(F o\varphi)'=\varphi'\times F'(\varphi)=\varphi'\times f(\varphi)$.

Théorème:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.
Soit $\varphi : J\longrightarrow I$ une bijection dérivable sur J.
Alors $\forall\, a, b\in I$, $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt=\int_a^b f(\varphi(u))\, \varphi'(u)\, du$.

- Exemple

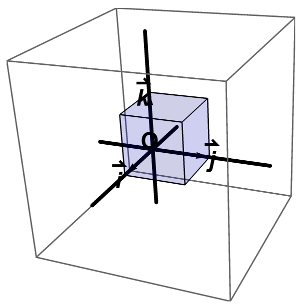
• $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\; dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(\theta)}\;\cos(\theta)\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\, d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\,\theta))\, d\theta=\frac{\pi}{4}$.

Ici on pose $\varphi : \theta\longmapsto\sin(\theta)=x$ pour $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Alors $x\in[0;1]$.

10. Calcul de volumes (hors programme)

10.1. L'unité de volume.

On munit l'espace d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
On appelle alors unité de volume, on note u.v.,
le volume du parallélépipède rectangle défini par les vecteurs du repère.
Ce parallélépipède est appelé parallélépipède unité.
Dans le cas d'un repère orthonormé,c'est un cube.On parle alors du cube unité.



10.2. Solides dirigés par un axe

Théorème

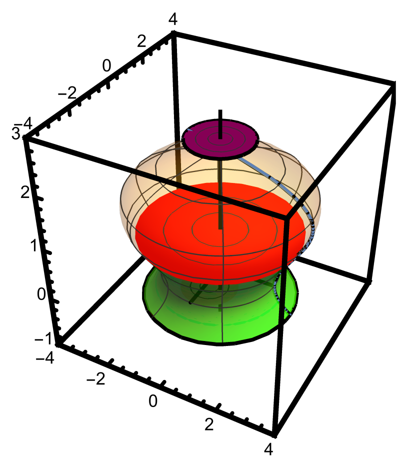
On considère un solide (Σ) délimité par des plans parallèles d'équation $z = a$ et $z = b$.

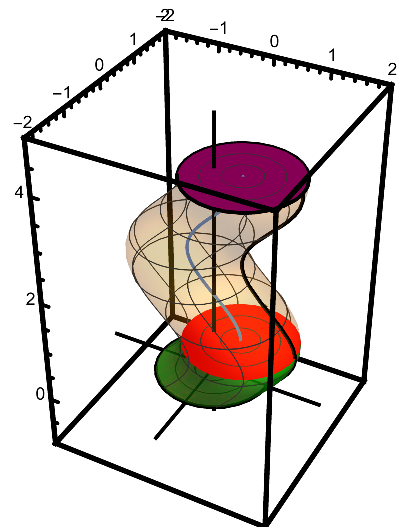
On suppose que, à toute côte $t \in [a; b]$, l'aire $\mathcal{S}(t)$ de la section du solide (Σ) avec le plan perpendiculaire à l'axe $\left(O; \vec{k}\right)$ d'altitude z, c'est à dire le plan d'équation "$z = z$", est continue sur $[a; b]$.

Théorème: (admis)

Le volume $\mathcal{V}$ du solide $\mathcal{S}$ est donné par le formule $\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{S}(z)\, dz$ u.v.

- **Illustration:**





Les sections sont des cercles dont le rayon est donné par la fonction $r(z) = -z^3 + 2z^2 + 2$ pour $z \in [a; b]$.

Ainsi la surface de la section est donnée par $\mathcal{S}(z) = \pi\left(-z^3 + 2z^2 + 2\right)^2$.

Son volume est donc donné par

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{S}(z)\, dz = \int_a^b \pi\left(-z^3 + 2z^2 + 2\right)^2 dz .$$

Pour le calculer, on développe le trinôme et on obtient: $\mathcal{V} = \pi\left[\frac{z^7}{7} - \frac{2}{3}z^6 + \frac{4}{5}z^5 - z^4 + \frac{8}{3}z^3 + 4z\right]_a^b$.

Pour $[a; b] = [0; 2]$, $\mathcal{V} = \frac{1508}{105}\pi$ u.v.

Dans ce cas, les sections sont des cercles de même rayon 1.

La fonction $\mathcal{S}$ est donnée par $\mathcal{S}(z) = \pi$ pour tout $t \in [0; 4]$.

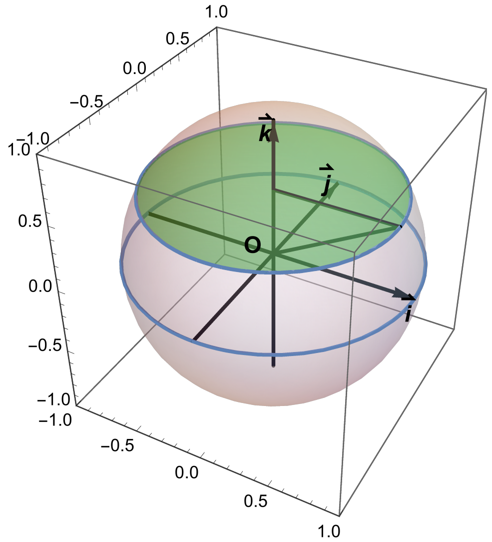
Alors le volume du solide est donné par $\mathcal{V} = \int_0^4 \pi\, dz = 4\pi$ u.v.

Remarque: Il n'est pas en fait nécessaire que l'axe soit rectiligne, même si cela simplifie les choses à priori.

Exemples classiques

- **Volume de la sphère:**

Soit (Σ) la sphère de centre O et de rayon R.



On remarque que la section de la sphère (Σ) avec le plan de côte z est un disque de rayon $r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ pour tout $z \in [-R; R]$.

La section a donc pour surface $\mathcal{S}(z) = \pi\,(r(z))^2 = \pi\left(R^2 - z^2\right)$, fonction continue sur $[-R; R]$.

Le volume de la sphère est donc $\mathcal{V} = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - z^2\right) dz = \pi\left(\int_{-R}^{R} R^2\, dz - \int_{-R}^{R} z^2\, dz\right) = \pi\left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3\right]_{-R}^{R}$ d'où $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$ u.v.

- **Volume d'une pyramide:**

Soit (Σ) une pyramide de base un polygone $\mathcal{P}$ inclus dans le plan $z = 0$, de surface de base $\mathcal{S}$ et de hauteur h perpendiculaire au plan $z = 0$.

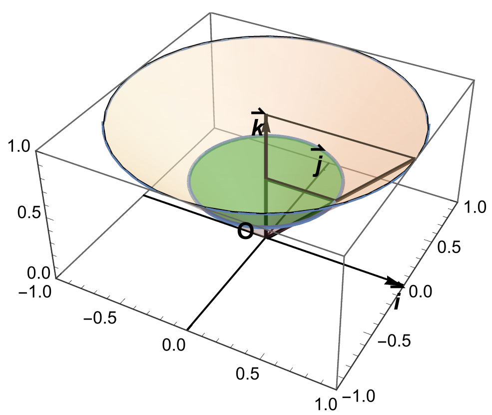
Alors la section de la pyramide avec le plan de côte $z \in [0; h]$ est un polygone semblable au polygone $\mathcal{P}$ de surface $\frac{z^2}{h^2}\mathcal{S}$. En effet c'est une réduction du polygone $\mathcal{P}$ dans le rapport $\frac{z}{h}$, d'après le théorème de Thalès.

Le volume de la pyramide est donc donné par $\int_0^h \frac{z^2}{h^2}\mathcal{S}\, dz = \frac{S}{h^2} \times \frac{1}{3} z^3\Big]_0^h = \frac{1}{3}\mathcal{S}\, h$ u.v.

- **Volume d'un cône:**

Soit (Σ) le cône de sommet O de rayon R et de hauteur h.

Alors la section du cône (Σ) avec le plan de côte z est un disque de rayon $r(z) = R\,\frac{z}{h}$ d'après le théorème de Thalès.



Ainsi la section de côte z a pour surface $\mathcal{S}(z) = \pi\,\dfrac{R^2}{h^2}\,z^2$, fonction continue sur $[0; h]$.

Le volume du cône est donc donné par $\mathcal{V} = \pi\,\dfrac{R^2}{h^2}\displaystyle\int_0^h z^2\,dz = \pi\,\dfrac{R^2}{h^2} \times \left.\dfrac{1}{3}\,z^3\right]_0^h = \dfrac{1}{3}\,\pi\,R^2\,h$ u.v.

Solides de révolution

Principe:

On fait pivoter la courbe représentative d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ autour d'un axe (en général l'axe $(O; \vec{i})$).

On engendre ainsi un solide, dit solide de révolution dont le volume est donné par $\displaystyle\int_a^b \pi\,(f(t))^2\,dt$.

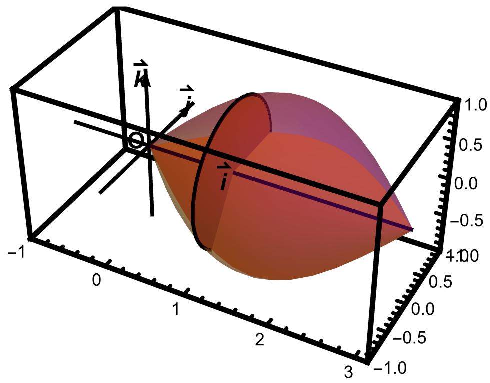
Illustration:

- Exemple 1:

On a représenté dans le plan $x\,O\,y$, la courbe de sinus sur $[0; \pi]$.

Le domaine du plan $x\,O\,y$, entre l'axe des abscisses, la courbe de sinus et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \pi$ est en bleu sur la figure.

Le disque rose représente la rotation du segment $[(x; 0); (x; \sin(x))]$ autour de l'axe $(O\,x)$.



On engendre ainsi un solide de révolution.

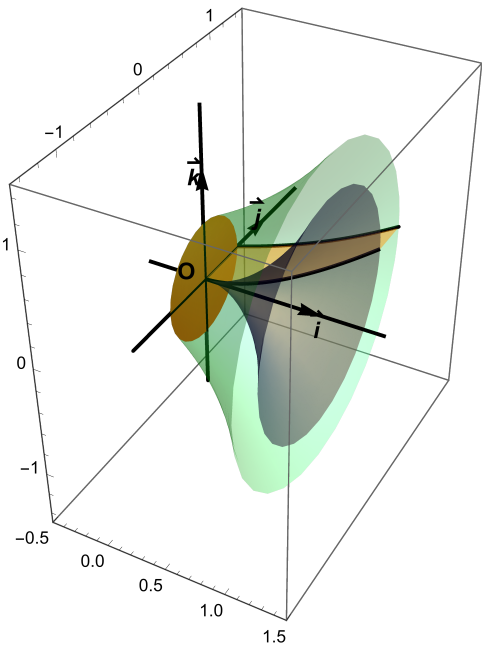
Son volume est donné par $\mathcal{V} = \displaystyle\int_0^\pi \pi(\sin(t))^2\,dt = \int_0^\pi \pi\,\sin^2(t)\,dt$.

On linéarise $\sin^2(t)$: $\sin^2(t) = \frac{1}{2}\,(1 - \cos(2\,t))$.

Par suite $\mathcal{V} = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^\pi (2 - \cos(2\,t))\,dt = \dfrac{\pi}{2}\left.\left(t - \dfrac{1}{2}\,\sin(2\,t)\right)\right]_0^\pi = \dfrac{\pi^2}{2}$ u.v.

- Exemple 2:

Déterminons le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe $(O; \vec{i})$ de la surface comprise entre les fonctions $t \mapsto \dfrac{e^t}{2}$ et $t \mapsto t^2$ pour $t \in [0; 1]$.



Ce volume est donné par $\mathcal{V} = \int_0^1 \pi \left(\frac{e^t}{2}\right)^2 dt - \int_0^1 \pi (t^2)^2 \, dt = \pi \left[\frac{1}{8} e^{2t} - \frac{1}{5} t^5\right]_0^1$.

Après calcul, on obtient $\mathcal{V} = \frac{\pi}{40}(5e^2 - 13)$u.v.

Code

```
leftRiemannSum[f_, {x_, a_, b_}, n_] := With[{h = (b - a)/n}, Sum[N[h f /. x → a + h r], {r, 0, n-1}]]

rightRiemannSum[f_, {x_, a_, b_}, n_] := With[{h = (b - a)/n}, Sum[N[h f /. x → a + h (r + 1)], {r, 0, n-1}]]

leftRiemannSumDiagram[f_, {x_, a_, b_, a0_, b0_}, n_, opts___] :=
 With[{h = (b - a)/n, s = leftRiemannSum[f, {x, a, b}, n]},
  Plot[f, {x, a0, b0}, PlotStyle → {Thickness[0.005], Black}, opts,
   GridLines → Automatic, Prolog → {Pink, Table[Polygon[{{a + h r, 0}, {a + h (r + 1), 0},
        {a + h (r + 1), f /. x → a + h r}, {a + h r, f /. x → a + h r}}], {r, 0, n - 1}], Black,
     Table[Line[{{a + h r, 0}, {a + h (r + 1), 0}, {a + h (r + 1), f /. x → a + h r},
        {a + h r, f /. x → a + h r}, {a + h r, 0}}], {r, 0, n - 1}]},
   PlotLabel → Style["somme inférieure= " <> ToString[NumberForm[s, {6, 4},
        NumberPadding → {" ", "0"}, ExponentFunction → (Null &)]], "Label"],
   ImagePadding → {{25, 25}, {25, 30}}, ImageSize → 300]]

rightRiemannSumDiagram[f_, {x_, a_, b_, a0_, b0_}, n_, opts___] :=
 With[{h = (b - a)/n, s = rightRiemannSum[f, {x, a, b}, n]},
  Plot[f, {x, a0, b0}, PlotStyle → {Thickness[0.005], Black}, opts,
   GridLines → Automatic, Prolog → {Pink, Table[Polygon[{{a + h r, 0}, {a + h (r + 1), 0},
        {a + h (r + 1), f /. x → a + h (r + 1)}, {a + h r, f /. x → a + h (r + 1)}}], {r, 0, n - 1}],
     Black, Table[Line[{{a + h r, 0}, {a + h (r + 1), 0}, {a + h (r + 1), f /. x → a + h (r + 1)},
        {a + h r, f /. x → a + h (r + 1)}, {a + h r, 0}}], {r, 0, n - 1}]},
   PlotLabel → Style["somme supérieure = " <> ToString[NumberForm[s, {6, 4},
        NumberPadding → {" ", "0"}, ExponentFunction → (Null &)]], "Label"],
   ImagePadding → {{25, 25}, {25, 30}}, ImageSize → 300]]
```