

Loi binomiale

Répétition indépendante d'expériences aléatoires identiques

1. Le contexte

1.1. Répétition indépendante d'expériences aléatoires.

Dans notre perspective de modéliser les phénomènes observés, comme par exemple la répétition du lancer d'un dé, d'une pièce de monnaie, du choix d'un échantillon de taille donnée dans une population, ..., on se place dans l'**hypothèse d'indépendance** des répétitions d'une même expérience aléatoire "minimale".

À chaque répétition, la probabilité d'une issue de cette expérience aléatoire "minimale" est identique.

Cela correspond à notre intuition lorsque nous lançons plusieurs fois la même pièce de monnaie, le même dé, ou bien plusieurs dés bien équilibrés, choisissons au hasard plusieurs objets dans un sac en contenant un grand nombre.

Cette situation correspond aussi à des tirages successifs dans une urne **avec remise**. En effet, à chaque tirage, les urnes sont à nouveau dans le même état.

Par contre, dans un tirage d'une urne **sans remise**, nous ne sommes plus dans une situation d'indépendance. En effet, après chaque tirage, les états des urnes ont changés. La probabilité d'obtenir une boule aussi.

Remarque:

Cette hypothèse d'indépendance n'est pas la seule possible et ne convient pas toujours. On développe alors d'autres modèles pour étudier ces phénomènes.

Revenons à plusieurs lancers d'un dé cubique.

Chaque lancer a 6 issues. Donc après 2 lancers, 36 issues, ... le nombre d'issues devient vite grand.

Nous nous concentrerons dans la suite du chapitre à étudier les répétitions d'une même expérience aléatoire, la plus simple possible: à **2 issues**.

Notons tout de suite qu'après n répétitions, il y a 2^n issues distinctes. On doit donc recentrer la question. Par exemple:

- ★ On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 6 fois «FACE» ?
- ★ En lançant un dé cubique, on s'intéresse au nombre de fois où on obtient 6 ...
- ★ Dans une urne contenant une proportion p de boules rouges et $1 - p$ de boules vertes, on tire avec remise 5 fois de suite une boule de l'urne et on note sa couleur. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 rouges exactement? Au moins 4 rouges?
- ★ On répond au hasard aux 20 questions d'un QCM (1 seule bonne réponse). Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne?

On modélise de telles répétitions d'expériences aléatoires à 2 issues en considérant le nombre de succès possibles parmi les répétitions. Notons qu'un succès est toujours relatif. Cela dépend du point de vue.

1.2. Épreuve de Bernoulli de paramètre p , $0 \leq p \leq 1$

Définition: Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire à 2 issues, souvent notée S (succès) et $E = \bar{S}$ (échec), telle que $p(S) = p$.

Une **variable aléatoire de Bernoulli** est la variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1\}$ définie par $p(X = 0) = p(E) = 1 - p$ et $p(X = 1) = p(S) = p$.

La loi suivie par X est appelée **loi de Bernoulli** de paramètre p .

C'est donc l'expérience aléatoire élémentaire qui va être répétée à l'identique. On obtient la loi:

Valeurs de X	0	1
$p(X = k)$	$1 - p$	p

1.3. Schéma de Bernoulli

Définition: Un **schéma de Bernoulli** d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et de paramètre $p \in [0; 1]$ (on dit aussi de paramètres n et p) est l'expérience aléatoire obtenue en **répétant** n fois de manière **indépendante** le **même** schéma de Bernoulli de paramètre p .

On définit alors X_n la variable aléatoire qui dénombre le nombre de succès obtenus après n répétitions. On a donc X_n à valeurs dans $\{0; 1; 2; \dots; n\}$: on peut en effet obtenir de 0 à n succès.

Définition: La **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n; p)$, est la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n .

La loi binomiale décrit donc la probabilité $p(X_n = k)$ pour $k = 0; 1; \dots; n$, c'est à dire la probabilité d'avoir obtenu de 0 succès à n succès, sans différenciation de l'ordre dans lequel ces succès ont été obtenus.

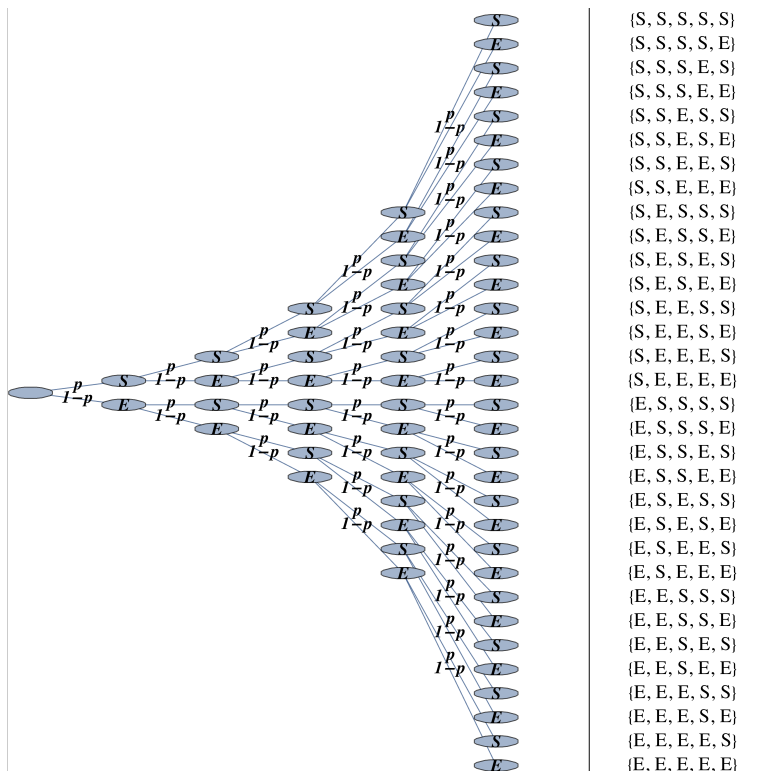
2. Description de la Loi binomiale

2.1. Les premiers cas $n = 1, 2, 3, 4$ et 5

• Pour $n = 1$, X_1 est une loi de Bernoulli de paramètre p .

• $n = 2, 3, 4$: à vous ...

• Pour $n = 5$:



D'où la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0, 4)$:

Nombre de succès	0	1	2	3	4	5
Probabilité	$0,4^5$	$5 \times 0,4^4 \times 0,6$	$10 \times 0,4^3 \times 0,6^2$	$10 \times 0,4^2 \times 0,6^3$	$5 \times 0,4 \times 0,6^4$	$0,6^5$

2.2. La généralisation

Soit n un entier naturel et p un réel de $[0; 1]$.

Soit X_n la variable aléatoire qui dénombre le nombre de succès du schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p .

Remarquons que toute branche de l'arbre de probabilité représentant la situation contient n «sous-branches».

Soit $k \in \{0; 1; \dots; n\}$.

Alors une branche de l'arbre qui mène à k succès est une branche qui est composée de

- k branches menant à un succès S donc de probabilité p
- $n - k$ branches menant à un échec E donc de probabilité $1 - p$.

La probabilité d'une telle branche est donc donnée par $p^k(1 - p)^{n-k}$.

On associe l'événement $(X = k)$, c'est à dire l'événement « k succès » à tous les mots de n lettres comportant k lettres S et $n - k$ lettres E .

Par exemple, pour $n = 5$, l'événement $(X = 3)$ est la réunion des 10 événements: $SSSEE, SSESE, SSEES, SESSE, SESES, SEESS, ESSSE, ESSSE, ESESS, EESSS$.

La probabilité d'un événement contenant p succès est donnée par $p^k(1 - p)^{n-k}$: en effet un tel événement correspond à k branches menant à un succès de probabilité p et donc à $(n - k)$ branches menant à un échec de probabilité $1 - p$.

Il reste à compter le nombre d'événements menant à k succès. Cela revient à dénombrer le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres contenant k lettres S identiques et $n - k$ lettres E identiques.

On dénombre dans un premier temps le nombre d'anagrammes de n lettres distinctes: $S_1, \dots, S_k, E_1, \dots, E_{n-k}$.

Il y en a $n!$, permutations de n lettres.

Ensuite, comme les k lettres S sont identiques, il y a $k!$ permutations des lettres $S_1, \dots, S_k$ possibles.

Par exemple, les mots:

$S_1 S_2 S_3 E_1 E_2, S_1 S_3 S_2 E_1 E_2, S_2 S_1 S_3 E_1 E_2, S_2 S_3 S_1 E_1 E_2, S_3 S_1 S_2 E_1 E_2, S_3 S_2 S_1 E_1 E_2$ ont été comptés dans les $5!$ permutations et pourtant sont identiques au mot $SSSE_1 E_2$.

De même, comme les $n - k$ lettres E sont identiques, il y a $(n - k)!$ permutations des lettres $E_1, \dots, E_{n-k}$ possibles.

Par exemple, les mots $SSSE_1 E_2$ et $SSSE_2 E_1$ sont identiques au mot $SSSEE$.

Finalement, on dénombre donc $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ mots distincts contenant k lettres S et $n - k$ lettres E .

Dans un schéma de Bernoulli de paramètre de succès p et d'ordre n , il y a donc $\binom{n}{k}$ branches menant à k

succès (et $n - k$ échecs), chacune de probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$ donc la probabilité de k succès est

$\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$. D'où:

Théorème:

Soit un schéma de Bernoulli de paramètre de succès p et d'ordre n .

Soit X_n la variable aléatoire à valeur dans $\{0; 1; 2; \dots; n\}$ dénombrant le nombre de succès et $B(n; p)$ la loi binomiale associée.

Alors pour tout entier $k \in \{0; 1; \dots; n\}$, $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$ avec $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour

$k \in \{0; 1; \dots; n\}$.

Les $\binom{n}{k}$ s'appellent les coefficients binomiaux.

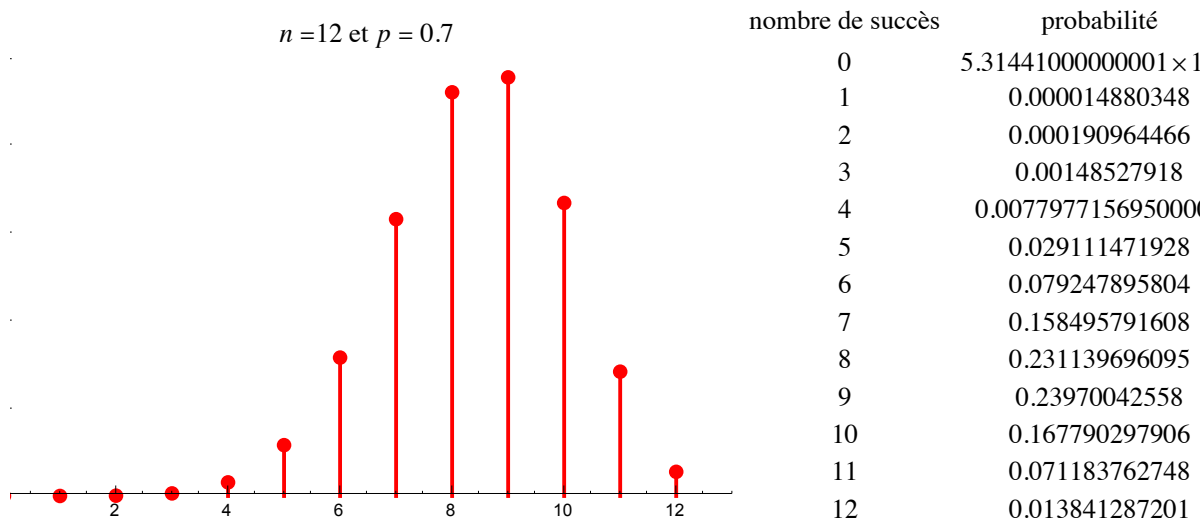
La loi binomiale $B(n; p)$ est donc décrite par la probabilité d'obtenir k succès est $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, on pourra retenir:

(combinaisons de k éléments parmi n) $\times$ (probabilité de succès)^{nombre de succès} $\times$ (probabilité d'échec)^{nombre d'échecs}.
Ainsi on a les cas particuliers:

- 0 succès, n échecs: $\binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$
- 1 succès, $n-1$ échecs: $\binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = n p (1-p)^{n-1}$
- 2 succès, $n-2$ échecs: $\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$
- ...
- k succès, $n-k$ échecs: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- ...
- $n-2$ succès, 2 échecs: $\binom{n}{n-2} p^{n-2} (1-p)^2 = \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} (1-p)^2$
- $n-1$ succès, 1 échec: $\binom{n}{n-1} p^{n-1} (1-p) = n p^{n-1} (1-p)$
- n succès, 0 échecs: $\binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} = p^n$.

On peut observer une "sorte" de symétrie du au fait que pour tout k , $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Ci-dessous, une représentation graphique pour $n = 10, p = 0,4$:



On a aussi $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$: la somme de toutes les probabilités est 1, grâce à la formule du binôme de Newton.

Enfin 4 événements à retenir:

- « que des succès » ou « aucun échec » de probabilité p^n
- « aucun succès » ou « que des échecs » de probabilité $(1-p)^n$.
- « au moins 1 succès », complémentaire de 0 succès et donc de probabilité $1 - (1-p)^n$
- « au moins 1 échec », complémentaire de n succès et donc de probabilité $1 - p^n$.

2.3. Paramètres de la loi binomiale.

Propriété:

Soit n un entier naturel et $p \in [0; 1]$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors:

- l'espérance est $E(X) = n p$
- la variance est $V(X) = n p (1 - p)$ et l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{n p (1 - p)}$.

Il faudra surtout retenir l'espérance qui permet d'obtenir le **gain moyen** d'un jeu de hasard par exemple.

Preuve pour l'espérance:

$$\text{On a } E(X) = \sum_{k=0}^n k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\text{On sait que } \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \text{ donc } E(X) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \text{ d'où}$$

$$E(X) = n p \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}.$$

$$\text{On pose } j = k - 1, \text{ et on obtient alors } E(X) = n p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = n p.$$

$$\text{En effet } \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = (p + (1-p))^{n-1} = 1 \text{ d'après la formule du binôme de Newton.}$$

Preuve pour la variance:

$$\text{On a } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ et par linéarité de l'espérance } E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X).$$

$$\text{D'où } V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2.$$

Remarquons alors que la variable aléatoire $X(X-1)$ prend les valeurs $k(k-1)$ pour $k \in \{0; 1; \dots; n\}$ et que pour

$$\text{tout } k \in \{0; 1; \dots; n\}, p(X(X-1) = k(k-1)) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\text{Ainsi } E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$\text{Or on a } k(k-1) \binom{n}{k} = k(k-1) \left(\frac{n}{k} \frac{(n-1)}{(k-1)} \binom{n-2}{k-2} \right) = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \text{ pour } k \in \{2; \dots; n\}.$$

$$\text{On en déduit } E(X(X-1)) = n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} = n(n-1) p^2.$$

$$\text{Par suite } V(X) = n(n-1) p^2 + n p - (n p)^2 = n p - n p^2 = n p (1 - p).$$

3. combinatoire: compléments

3.1. Combinatoire

Les coefficients binomiaux appartiennent à la branche dite du dénombrement ou de la combinatoire: il s'agit de compter les cas.

Pour une grande part, le calcul de probabilités demande de savoir compter les cas.

Par exemple:

- quelle est la probabilité d'obtenir un carré d'as sur une main de 5 cartes?
- quelle est la probabilité de choisir 3 personnes ayant une qualité donnée dans un groupe dont on connaît la proportion globale de cette qualité ?

Dans toutes ces situations, le calcul de probabilités peut être ramené à dénombrer le nombre de cas favorables par rapport au nombre total de cas.

Par exemple, pour le carré d'as, on peut considérer qu'il y a, avec un jeu de 52 cartes, 48 mains distinctes de 5 cartes avec un carré d'as (les 4 as et une autre carte qui n'est pas un as).

D'autre part il y a $52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48 = 311\,875\,200$ mains distinctes (52 choix pour la 1^{ère} carte, 51 pour la 2^{de}, ... jusqu'à la 5^{ème}).

Donc la probabilité d'obtenir un carré d'as est de $\frac{48}{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48} = \frac{1}{6\,497\,400} \approx 1,5 \times 10^{-7}$.

Pour modéliser, on peut associer chaque carte du jeu à un ensemble fini de 52 éléments. Une main de 5 cartes revient à considérer un ensemble constituée de 5 éléments de cet ensemble.

Soit n un entier naturel. On considère un ensemble fini à n éléments $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. On peut assimiler $\mathcal{E}$ à $\{1; 2; 3; \dots; n\}$.

3.2. Listes non ordonnées: parties, combinaisons

Définition:

Une partie de $\mathcal{E}$ est un ensemble constituée d'éléments de $\mathcal{E}$.

Une partie à k éléments est une partie de $\mathcal{E}$ contenant k éléments distincts de $\mathcal{E}$.

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini Ω est appelé le cardinal de cet ensemble. On le note souvent $\text{card}(\Omega)$ ou $|\Omega|$.

$\{e_1; e_2; e_3\}$ est une partie à 3 éléments de $\mathcal{E}$. On note $\text{card}(\{e_1; e_2; e_3\}) = 3$.

Convention: L'ensemble vide est une partie de tout ensemble. C'est la seule partie à 0 élément.

Une partie de l'ensemble $\mathcal{E}$ à n éléments peut avoir de 0 élément (l'ensemble vide $\emptyset$) à n éléments.

Exemple:

Avec $\mathcal{E} = \{A; B; C\}$, on peut constituer les parties: $\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A; B\}, \{A; C\}, \{B; C\}$ et $\{A; B; C\}$.

Remarquons sur cet exemple, que la nature des objets de l'ensemble importe peu sur la constitution des parties.

Avec $\mathcal{E} = \{\circ; \star; @\}$, on obtient $\emptyset, \{\circ\}, \{\star\}, \{@\}, \{\circ; \star\}, \{\circ; @\}, \{\star; @\}, \{\circ; \star; @\}$ donc 8 parties aussi.

L'ensemble des parties d'un ensemble $\mathcal{E}$ est noté $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.

Propriété: $\text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{E})) = 2^{\text{card}(\mathcal{E})}$.

Autrement dit avec un ensemble à n éléments, on peut construire 2^n parties distinctes contenant de 0 à n éléments.

Définition:

Soit n un entier naturel et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

On appelle **combinaison** de k éléments parmi n , toute partie à k éléments que l'on peut constituer avec un ensemble à n éléments.

On note $\binom{n}{k}$ (parfois C_k^n) le nombre de combinaisons, **coefficients binomiaux**.

On lit « k parmi n ».

Ainsi on a par définition:

- $\binom{n}{0} = 1$ pour tout entier $n \geq 1$ (il y a une seule partie à 0 élément):
- $\binom{n}{n} = 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
- $\binom{n}{1} = n$: il est facile de voir qu'il y a autant de parties à 1 élément que d'éléments dans l'ensemble $\mathcal{E}$

• $\binom{n}{n-1} = n$: il y a autant de parties à $n-1$ éléments que de parties à 1 élément. En effet, choisir $n-1$ éléments revient à en mettre un de côté.

• $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Convention: $\binom{0}{0} = 1$. Il y a une seule partie à 0 élément que l'on peut constituer à partir de l'ensemble à 0 éléments.

Propriété: Pour tout entier naturel n , pour tout entier k avec $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

En effet, choisir k éléments, revient à choisir les $n-k$ restants. Ainsi à chaque partie à k éléments, correspond une seule partie à $n-k$ éléments, son complémentaire dans $\mathcal{E}$.

Propriété: Pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

En effet la somme des nombres de parties à k éléments pour k allant de 0 à n est égal au nombre total de parties.

Propriété: formule de récurrence.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, pour tout entier k avec $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Notons a un des n éléments de $\mathcal{E}$.

Alors $\mathcal{E} = \{a\} \cup \mathcal{E}'$ où $\mathcal{E}'$ est un ensemble à $n-1$ éléments.

Alors comme une partie A à k éléments de $\mathcal{E}$:

- ou contient a
- ou non,

alors

- ou $A = a \cup A'$ avec A' une partie à $k-1$ éléments de l'ensemble à $n-1$ éléments $\mathcal{E}'$
- ou $A \subset \mathcal{E}'$ et donc A est une partie à k éléments de $\mathcal{E}'$.

Par suite il y a autant de parties à k éléments choisis parmi n éléments que de parties à k éléments parmi $n-1$ ou de parties à $k-1$ éléments choisis parmi $n-1$.

On a donc la relation proposée.

On peut ainsi pas à pas générer les combinaisons. C'est le **triangle de Pascal**.

ensemble à 0 éléments	1								
ensemble à 1 éléments	1	1							
ensemble à 2 éléments	1	2	1						
ensemble à 3 éléments	1	3	3	1					
ensemble à 4 éléments	1	4	6	4	1				
ensemble à 5 éléments	1	5	10	10	5	1			
ensemble à 6 éléments	1	6	15	20	15	6	1		
ensemble à 7 éléments	1	7	21	35	35	21	7	1	

nombre de parties à 0 éléments
nombre de parties à 1 élément
nombre de parties à 2 éléments
nombre de parties à 3 éléments
nombre de parties à 4 éléments
nombre de parties à 5 éléments
nombre de parties à 6 éléments
nombre de parties à 7 éléments

ensemble à 0 éléments	$\binom{0}{0}$								
ensemble à 1 éléments	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
ensemble à 2 éléments	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
ensemble à 3 éléments	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
ensemble à 4 éléments	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
ensemble à 5 éléments	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
ensemble à 6 éléments	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		
ensemble à 7 éléments	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$	

nombre de parties à 0 éléments
nombre de parties à 1 élément
nombre de parties à 2 éléments
nombre de parties à 3 éléments
nombre de parties à 4 éléments
nombre de parties à 5 éléments
nombre de parties à 6 éléments
nombre de parties à 7 éléments

Note:

Les applications des coefficients binomiaux sont multiples et variées. en combinatoire bien sur, mais ils interviennent dans nombre de problèmes d'analyse.

Par exemple, on a la célèbre formule du binôme de Newton (généralisation de l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2);$$

Formule du binôme de Newton:

Soit a et b deux nombres réels (ou complexes), $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ pour tout entier naturel n .

Ainsi par exemple $(a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$.

Cas particulier :

$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$. On retrouve que le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal fini n

est 2^n . Chaque $\binom{n}{i}$ est exactement le nombre de parties à i éléments.

3.3. Listes ordonnées (1): Les permutations**Définition:**

Une permutation de l'ensemble $\mathcal{E}$ est une liste ordonnée des n éléments de $\mathcal{E}$.

Exemple:

Avec $\mathcal{E} = \{1; 2; 3\}$, les permutations sont $(1; 2; 3)$, $(1; 3; 2)$, $(2; 1; 3)$, $(2; 3; 1)$, $(3; 1; 2)$ et $(3; 2; 1)$.

Ce sont donc toutes les façons d'arranger les 3 éléments de l'ensemble sans répétitions.

Propriété:

Soit n un entier naturel.

Le nombre de permutations des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ est $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Ce nombre est noté $n!$ et se lit **factorielle de n** .

Convention: $0! = 1$.

Ainsi par exemple, les 21 élèves d'une classe peuvent se présenter suivant $21! = 51\,090\,942\,171\,709\,440\,000$

façons différentes à l'entrée en classe.

De même, les anagrammes du mot SUPER sont au nombre de $5! = 120$.

Remarque: les permutations sont sans cesse utilisées en mathématiques et en combinatoire en particulier.

3.3. Listes ordonnées (2) avec répétition: Les n -uplets

Définition:

Soit n et p deux entiers naturels.

On appelle p -uplet d'éléments de $\mathcal{E}$ toute liste ordonnée constituée de p éléments de $\mathcal{E}$, distincts ou non.

Ainsi un p -uplet peut avoir la longueur que l'on veut.

Le langage informatique utilise les listes ordonnées constituées à partir de l'alphabet $\{0; 1\}$ pour fonctionner.

Un octet est un 8-uplet ou octuplet. $10001111 = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ est une liste de 8 éléments ordonnés.

Les mots d'un alphabet sont des p -uplets constitués avec les lettres de l'alphabet.

D'ailleurs on confond souvent la liste et le mot comme nous l'avons fait pour la loi binomiale.

On associe l'issue $(S; S; E; E; S)$ au mot $SSEES$.

Propriété:

Pour tout entier n et tout entier p , il y a n^p p -uplets distincts constitués avec un ensemble de n éléments.

En effet, il suffit de voir que pour chaque élément de la liste, il y a n choix possibles.

On retrouve ainsi que le nombre d'issues d'un schéma de Bernoulli d'ordre n est 2^n . Il y a 2^n n -uplets distincts constitués avec les 2 lettres S et E .

3.4. Listes ordonnées (3) sans répétition: Les arrangements

En interdisant la répétition d'un élément, avec un ensemble fini à n éléments $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, on peut obtenir des listes ordonnées sans répétition de longueur 0 (la liste vide) jusqu'à la longueur n .

Définition:

Soit n un entier naturel et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

Une liste ordonnée sans répétition de k éléments d'un ensemble à n éléments est appelé un arrangement de k éléments parmi n .

Propriété:

Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n est donné par $n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

En effet, il suffit de voir que l'on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le suivant et donc $n-k+1$ pour le $k^{\text{ième}}$.

Remarque: on note A_k^n ce nombre.

Ainsi par exemple, on peut constituer $21 \times 20 \times 19 = 7980$ groupes de 3 personnes distinctes avec un groupe de 21.

Corollaire: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_k^n}{k!}$.

Preuve:

Remarquons qu'un arrangement de k parmi n est une permutation des k éléments d'une combinaison donnée.

Il y a $k!$ permutations pour chaque combinaison, et donc $A_k^n = k! \binom{n}{k}$.

On obtient ainsi une formule explicite pour déterminer les coefficients binomiaux.

4. Applications de la Loi binomiale

5. Quelques exercices de dénombrement