Principe de récurrence: exercices

Exercice 1:

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on définit $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

1. Calculer les premiers termes et conjecturer une formule explicite pour P_n.

2. Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice 2:

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 0$ par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + 3$.

1. Représenter graphiquement les termes de la suite sur l'axe des abscisses (représentation en toile d'araignée ou en escargot).
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1} \geq 5$.

3. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

4. Déduire de la question précédente une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2 + 1}}$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer les valeurs exactes des 6 premiers termes de la suite puis conjecturer une formule explicite pour u_n.

2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 4:

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 0$ et $b_0 = 11$ et, pour tout entier naturel n,
$a_{n+1} = 0,8\,a_n - 0,6\,b_n + 2$ et $b_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,8\,b_n - 2$.

1. **a.** Calculer les premiers termes de la suite (au moins 10. On pourra utiliser un tableur.)

b. Représenter le nuage de points de coordonnées $(a_n ; b_n)$. Quelle semble être la nature de ce nuage?

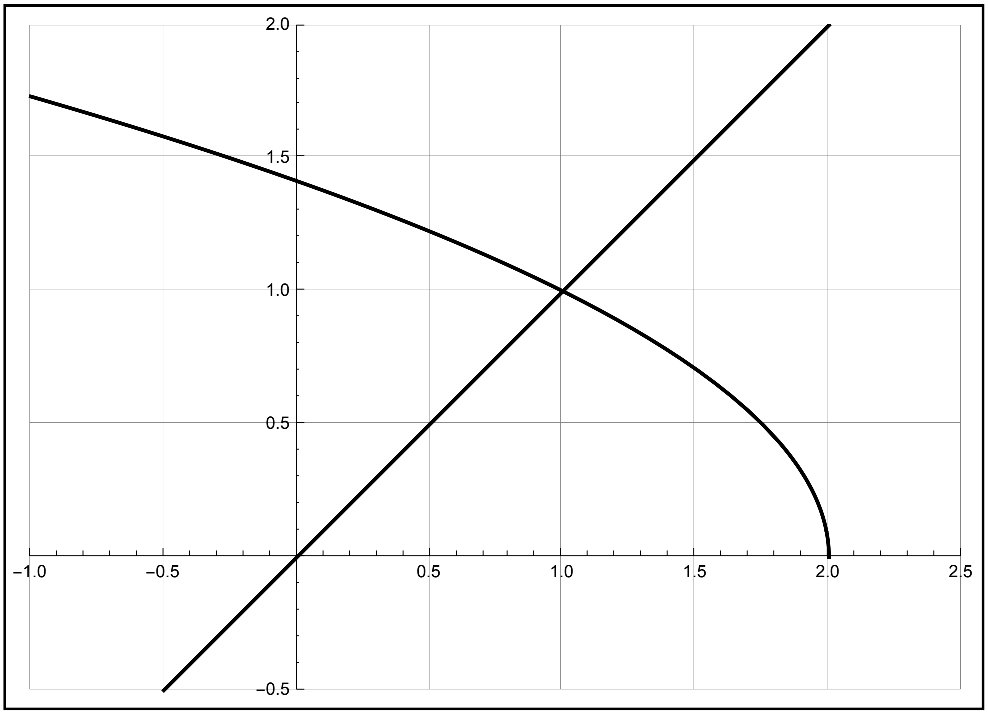
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $(a_n - 4)^2 + (b_n - 2)^2 = 97$.

b. Que peut-on en déduire?

Exercice 5:

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$.

1. Représenter, sur l'axe des abscisses, les 5 premiers termes de la suite (u_n) dans le repère ci-dessous.



La suite (u_n) est-elle bornée ? Monotone ?

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_0 \leq u_n \leq u_1$.

Exercice 6:

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n{}^2 + 3\, u_n - \frac{3}{2}$.

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes de u_3 et u_4.

3. Conjecturer le sens de variation (et la convergence de la suite (u_n)).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}\, v_n{}^2$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}\, v_n + 1\right)$.

b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 7:

1. On considère l'algorithme suivant:

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, Afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et

$$v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

2.a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

3.a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Exercice 8:

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 5 \text{ et, pour tout entier } n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1.a. Calculer u_1.

b. Les valeurs de $u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à: $45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621$.
À partir de ces données, conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a: $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question **1.b.**

Exercice 9:

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Exercice 10:

Partie 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f .

b. Étudier les variations de la fonction f . Dresser son tableau de variation.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.

b. Pour quelles valeurs de x, la tangente à la courbe représentative de f est-elle parallèle à la droite d'équation $y = x$?

4. Représenter la courbe représentative de f , en tenant compte des renseignements précédents dans le repère Annexe 1.

Partie 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n+1}{3-n}$.

1. La suite (u_n) est-elle définie pour tout entier n ?

2. Justifier que la suite (u_n) est bornée à partir du rang 4.

3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

Partie 3

Soit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{3 - v_n} \end{cases}$.

1. Représenter les 5 premiers termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ de l'annexe 2.
Que peut-on conjecturer quant au comportement de la suite (v_n) ?

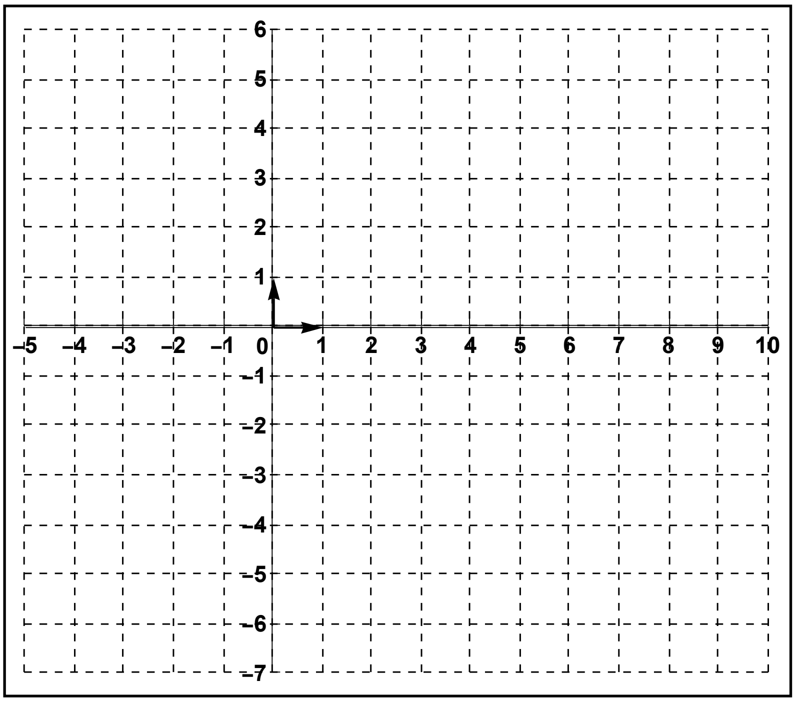
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul , $0 < v_n < 1$.

3. Exprimer $v_{n+1} - 1$ en fonction de $v_n - 1$.

4. En déduire que $\dfrac{v_{n+1} - 1}{v_n - 1} = \dfrac{2}{3 - v_n}$ puis que $\dfrac{2}{3} < \dfrac{v_{n+1} - 1}{v_n - 1} < 1$.

5. Conclure quant à la monotonie de la suite (v_n).

Annexe 1 (Partie A)



Annexe 2 (Partie C)