Épisode 1: Le principe de récurrence

1. Introduction

1.1. Compter les diagonales d'un polygone convexe

Un polygone convexe est un polygone tel qu'un segment joignant deux points quelconques du polygone est toujours contenu à l'intérieur de ce polygone.

On note n le nombre de côtés du polygone. Alors $n \geq 3$.
On a pour $n = 3$, aucune diagonale,
$n = 4$, 2 diagonales
$n = 5$, 5 diagonales,
$n = 6$,
$n = 7$,

On conjecture que:
• que le nombre de diagonales si on ajoute un sommet à un polygone donné est augmenté de $1 + (n + 1 - 3) = n - 1$ diagonales
• que le nombre de diagonales est donné par $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Comment démontrer ce résultat dans le cas général?

Éléments de solutions:

Notons d_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés.
On ajoute un sommet pour obtenir un polygone à $n + 1$ côtés.
On considère les 2 sommets du polygone à n côtés les plus proches de ce nouveau sommet.
Mis à part ces 2 sommets, le nouveau sommet réalise une diagonale avec tous les sommets restants c'est à dire $n + 1 - 3$ sommets, donc $n + 1 - 3 = n - 2$ diagonales.
De plus, le côté joignant les deux sommets les plus proches du nouveau sommet n'est plus un côté, mais une diagonale.
Ainsi, on obtient $d_{n+1} = d_n + n - 1$ pour tout entier $n \geq 3$.
Ainsi de proche en proche, on peut calculer le nombre de diagonales d'un polygone ayant n côtés.

On peut alors vérifier que $\dfrac{n(n-3)}{2} + (n-1) = \dfrac{n^2 - n - 2}{2} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{2} = \dfrac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$.
Ainsi, grâce à la formule de récurrence qui lie le nombre de diagonales d'un polygone à un polygone ayant un côté de moins, on peut remarquer que la formule proposée pour le nombre de diagonales se transmet d'une étape à l'autre.

Ainsi, comme la formule est vraie pour les premiers rangs et comme elle se transmet, on comprend que l'on pourra l'appliquer pour tout entier naturel $n \geq 3$.

C'est le principe d'une échelle infinie. Nous savons monter les premiers barreaux et nous savons monte d'un barreau à l'autre, quelque que soit ce barreau. Ainsi, on peut monter tous les barreaux, indéfiniment.

1.2. Démontrer un phénomène remarquable

Remarquons:
$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \ldots$

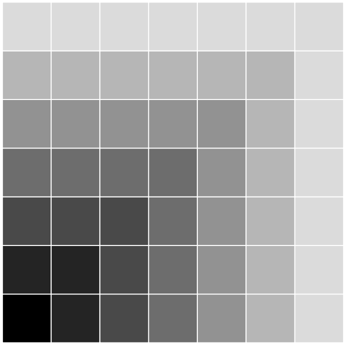
On remarque donc que la somme des p premiers entiers impairs consécutifs est égale au carré de p.

On écrit $1+3+\ldots+(2p-1)=p^2$ ou encore $\sum_{k=1}^{p} 2k-1=p^2$.

Comment démontrer ce résultat pour tous les nombres entiers?

Éléments de solution:

```
Manipulate[
 Style[Grid[
   {
    {Graphics[
      {
       Table[
        {FaceForm[Lighter[Black, Max[i, j] / n]],
         EdgeForm[White],
         Rectangle[{i, j}, {i + 1, j + 1}]
        },
        {i, 0, n - 1}, {j, 0, n - 1}
       ],
       Table[{Style[Text[2 i + 1, {i + 1 / 2, -1 / 2}], FontFamily → "Garamond", Black, 12],
          Style[Text[If[i ≠ n - 1, "+", "="], {i + 1, -1 / 2}],
           FontFamily → "Garamond", Black, 12]
        }
        , {i, 0, n - 1}],
       Style[Text[n ^ 2, {n + 1 / 2, -1 / 2}], FontFamily → "Garamond", Black, 12]
      },
      Axes → False, ImageSize → 200
     ],
     Column[{
       "On illustre ce résultat par la suite des ",
       "nombres de carrés dans une grille de côté p × p.",
       "On peut compter le nombre total de carrés", "comme p × p = p²",
       "ou bien ",
       "comme la somme des n premiers entiers impairs.",
       "À chaque étape, on ajoute l'entier impair",
       "suivant de carrés:", "p lignes + p colonnes + 1 coin = 2 p + 1."
      }
     ]
    }},
   Alignment → {Center, Center},
   ItemSize → {{Scaled[0.3], Scaled[0.6]}, Automatic}],
  FontFamily → "Garamond", Black, 14],
 {{n, 7, "nombre de carrés"}, 1, 100, 1, Appearance → "Labeled"},
 Paneled → False]
```



1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49

On illustre ce résultat par la suite des nombres de carrés dans une grille de côté $p \times p$.
On peut compter le nombre total de carrés
comme $p \times p = p^2$
ou bien
comme la somme des n premiers entiers impairs.
À chaque étape, on ajoute l'entier impair suivant de carrés:
p lignes + p colonnes + 1 coin = $2p + 1$.

Les premiers rangs sont déjà vérifiés.
Sinon, on remarque: d'une part:

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{p}(2k-1) + (2(p+1)-1)$$

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{p}(2k-1) + 2p + 1$$

D'autre part:

$$(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$$

Par identification, on en déduit que la formule $\sum_{k=1}^{p}(2k-1) = p^2$ se transmet d'un rang au suivant, comme on l'observe sur le schéma, en ajoutant une ligne et une colonne.

Comme pour le cas précédent, on en déduit que la formule est vraie pour tous les entiers naturels non nuls puisqu'elle est héréditaire. Elle se transmet d'un rang au suivant.

2. Le principe de récurrence

2.1. Point culture

Considérons un phénomène naturel: la duplication.
1 cellule ou un organisme unicellulaire se scinde en deux pour former deux cellules, qui elles mêmes se scindent pour en former deux autres et ainsi de suite.

Au départ, on compte donc $1 = 2^0$ cellule.

Après la $1^{\text{ère}}$ division, on compte $2 \times 1 = 2^1$cellules.

Après la $2^{\text{ème}}$ division, on compte $2 \times 2^1 = 2^2$ cellules
…et ainsi de suite…

On veut donc pouvoir écrire qu'après la $n^{\text{ème}}$ division, on comptera

$2 \times \left(\text{le nombre de cellules après la } (n-1)^{\text{ème}} \text{ division}\right) = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ cellules.

Longtemps, on a considéré que le « ainsi de suite » ou le « proche en proche » étaient suffisant pour valider le résultat.
On parlait alors de raisonnement par induction ou par itération du procédé.
On s'appuyait sur le sens commun, le côté naturel du principe décrit.
L'évolution des mathématiques et l'invalidation de principes dits « naturels » (comme la propriété: « par un point, il passe une droite et une seule parallèle à une autre droite ») ont amené les mathématiciens à théoriser ce principe d'induction.

Il existe un raisonnement constitutif de la théorie mathématique qui permet de formaliser et de valider le principe décrit ci-dessus.
C'est le raisonnement par récurrence.
Ce raisonnement s'appuie sur le principe ou axiome (en fait un postulat) de récurrence.
C'est un point de départ choisi qui permet de construire la théorie des nombres que nous étudions.
On ne sait pas en fait démontrer que ce principe est vrai. On doit le supposer comme vrai.
On montre seulement qu'étant choisi vrai, il permet de construire une théorie cohérente. C'est ce que l'on appelle

l'épistémologie

2.2. L'énoncé

Principe de récurrence:

Soit $\mathcal{P}(n)$ un énoncé (ou propriété) dépendant de l'entier n pour $n \geq k$, k entier donné. Si:

• $\mathcal{P}(k)$ est vrai (**initialisation** du raisonnement)

et

• si pour tout entier $n \geq k$, l'énoncé "$\mathcal{P}(n)$ est vrai" implique l'énoncé "$\mathcal{P}(n+1)$ est vrai" ,

alors on peut affirmer que l'énoncé $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout entier $n \geq k$.

Image: On illustre en disant que si on peut gravir le premier barreau d'une échelle infinie ou la première marche d'un escalier infini, et si de plus on sait toujours passer d'un barreau au barreau suivant, ou d'une marche à l'autre, alors on peut gravir tous les barreaux de l'échelle ou toutes les marches de l'escalier.

Remarque: En général $k = 0$, 1 ou 2 mais ce n'est systématique. Il arrive qu'une propriété ne soit vraie qu'à partir d'un certain rang k.

Attention:

• une propriété peut être héréditaire sans être vraie. Par exemple $\mathcal{P}_n$: "3^n est pair" est une propriété héréditaire, toujours fausse.

• il faut s'assurer que l'hérédité démarre au premier rang vérifié.

2.3. Exemple de preuves par récurrence: somme des n premiers entiers

On définit la propriété $P(n)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$que cette propriété est vraie.

Étape 1: Initialisation.

Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i = 1$ et $\dfrac{1\,(1+1)}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$ donc on a bien $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1\,(1+1)}{2}$.

La propriété $P(1)$ est vraie.

Étape 2: Hérédité.

Soit n un entier non nul.

On fait l'hypothèse de récurrence $P(n)$ est vraie c'est à dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

(*On va alors montrer que sous cette hypothèse, la propriété* $P(n+1)$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}$ *est vraie. Il semble important de bien écrire la propriété* $P(n+1)$ *dans le but de savoir précisément ce que l'on veut obtenir.*)

Remarquons alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$.

Ainsi comme par hypothèse de récurrence $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$.

(*Il semble aussi important de bien préciser à quel moment de la démonstration l'hypothèse de récurrence est nécessaire. Elle doit absolument être utilisée à un moment ou à un autre.*)

Par suite $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n(n+1) + 2\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$ d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}$.

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie. La propriété $P(n)$ est héréditaire.

Étape 3: Conclusion. (*La conclusion est absolument nécessaire pour terminer le raisonnement.*)

La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n = 1$ et est héréditaire. D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier n non nul.

Ainsi pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.4. Modèle

On définit la propriété $P(n)$: …. (*la propriété à démontrer doit être clairement explicitée*.)
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$que cette propriété est vraie pour tout entier n.

Étape 1: Initialisation.
Pour $n = k$,
…… (*Il faut bien vérifier la validité de la propriété au rang k. C'est en général assez facile (parfois cela demande quand même quelques efforts) mais il ne faut pas tomber dans l'évidence*.)
La propriété $P(k)$ est vraie.

Étape 2: Hérédité.
Soit n un entier, $n \geq k$.
On fait l'hypothèse de récurrence $P(n)$ est vraie c'est à dire que …(*réécrire la propriété au rang n n'est as inutile*).
(*On va alors montrer que sous cette hypothèse, la propriété* $P(n+1)$: … *est vraie*.
Il semble important de bien écrire la propriété $P(n+1)$ *dans le but de savoir précisément ce que l'on veut obtenir,* ***au brouillon tout du moins***.)
………
Ainsi comme par hypothèse de récurrence ……, on obtient …….
(*Il semble aussi important de bien préciser à quel moment de la démonstration l'hypothèse de récurrence est nécessaire. Elle doit absolument être utilisée à un moment ou à un autre*.)
……………
La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.
La propriété $P(n)$ est héréditaire.

Étape 3: Conclusion.
(*La conclusion est absolument nécessaire pour terminer le raisonnement*.)
La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n = k$ et est héréditaire pour $n \geq k$.
D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geq k$.
Ainsi pour tout entier $n \geq k$, ….

3. Classiques

3.1. Démontrer une formule ou un résultat général

1. Démontrer par récurrence que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Preuve:

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 10$, $2^n \geq 100\,n$.

Preuve:

3.2. Avec des suites

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = u_n^{\,2} + 3\,u_n - 1$.
Conjecturer à l'aide de la calculatrice l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer le résultat par récurrence.

Preuve:

2. Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$ est bornée.

Preuve:

3.3. Exercice 3

1. Formule explicite d'une suite arithmétique:
Soit $(u_n)_{n\in D}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p.

Alors pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p + (n-p)\,r$.

En particulier si le premier terme est u_0 c'est à dire si la suite est définie sur $\mathbb{N}$, on obtient $u_n = u_0 + n\,r$.

Preuve:

2. Somme des termes d'une suite arithmétique:

Soit $(u_n)_{n\in D}$ une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r.

Alors pour tout entier naturel $n \geq p$, $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_i = \frac{\left(u_p + u_n\right)(n-p+1)}{2}$.

En particulier si $D = \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$ et si $D = \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{(u_1 + u_n)\,n}{2}$.

On pourra retenir la formule:

$\frac{1}{2}$(premier terme de la somme + dernier terme de la somme) (nombre de termes dans la somme).

Preuve :

3. Propriété (formule explicite d'une suite géométrique):

Soit $(u_n)_{n\in D}$ une suite arithmétique de raison q et de premier terme u_p.

Alors pour tout entier $n \geq p$, $u_n = u_p\,q^{n-p}$.

En particulier si le premier terme est u_0 c'est à dire si la suite est définie sur $\mathbb{N}$, on obtient $u_n = u_0\,q^n$.

Preuve:

4. Somme des termes d'une suite géométrique:

Soit $(u_n)_{n\in D}$ une suite géométrique de premier terme u_p et de raison $q \neq 1$.

Alors pour tout entier naturel $n \geq p$, $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = u_p \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}$.

En particulier si $D = \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ et si $D = \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 \frac{1-q^{n}}{1-q} = u_p \frac{q^{n}-1}{q-1}$.

On pourra retenir la formule: $(\text{premier terme}) \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de terme}}}{1-\text{raison}} = (\text{premier terme}) \times \dfrac{\text{raison}^{\text{nombre de terme}}-1}{\text{raison}-1}$.

Preuve :

3.4. Exercice 4

1. Soit les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel non nul, par $f_n(x) = x^n$.

On admet que pour toutes fonctions u et v dérivables sur un même intervalle alors la fonction produit $(u\,v)$ est dérivable sur cet intervalle et que $(u\,v)' = u'\,v + v'\,u$.

Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$.

Preuve:

2. Démontrer par récurrence sur $\mathbb{N}$, que pour tout réel $x \geq 0$, pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1 + n\,x$.

Preuve: